RICEVIMENTO 6

Titolo nota 22/11/2007

$$\{x+xy^2 : x^2+y^2=1\}$$

$f(x,y) = x+xy^2$ $\phi(x,y)=x^2+y^2-1$

$\boxed{2^\circ \text{ sistema}}$

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1+y^2 = 2\lambda x \\ \cancel{2}xy = \cancel{2}\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

QUESTO ESERCIZIO STA A PAG. 35 VERSIONE 2006

$\boxed{2^a \text{ eq.}}$ $y(x-\lambda)=0$

$y=0$ $\xrightarrow{\boxed{3^a \text{ eq.}}}$ $x=\pm 1$ $\rightarrow$ $(1,0), (-1,0)$

$x=\lambda$ $\xrightarrow{1^a \text{ eq.}}$ $1+y^2=2\lambda^2$; $y^2=2\lambda^2-1$

$\xrightarrow{3^a \text{ eq.}}$ $\underbrace{\lambda^2}_{x^2}+\underbrace{2\lambda^2-1}_{y^2}=1$ $\rightarrow$ $3\lambda^2=2$ $\rightarrow$ $\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \to x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \to y^2 = 2\lambda^2 - 1 = 2\,\frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \to \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$ 2 PUNTI

$$\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \to x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \to y^2 = \frac{1}{3} \to y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \to \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

Candidati : $(\pm 1, 0)$ $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ in tutto 6 punti.

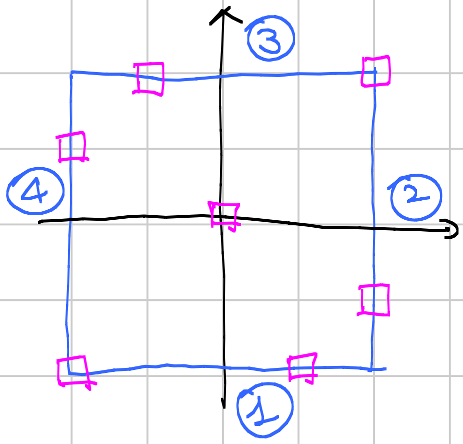
$f(x,y)$ che simmetrie ha?

PARI rispetto a y $\quad f(x,-y) = f(x,y)$

DISPARI rispetto a x $\quad f(-x,y) = -f(x,y)$

PAG 93

$$\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix} \{ \underbrace{x^2+xy+y^2}_{f(x,y)} : x\in[-1,1],\ y\in[-1,1] \}$$



W ⟹ max e min esistono

SING. INTERNI : $\emptyset$

STAZ. INTERNI $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2y+x=0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow (0,0)$

BORDO Pezzo $\boxed{1}$ $\{(t,-1) : t\in[-1,1]\}$

$\varphi_1(t) = f(t,-1) = t^2-t+1$

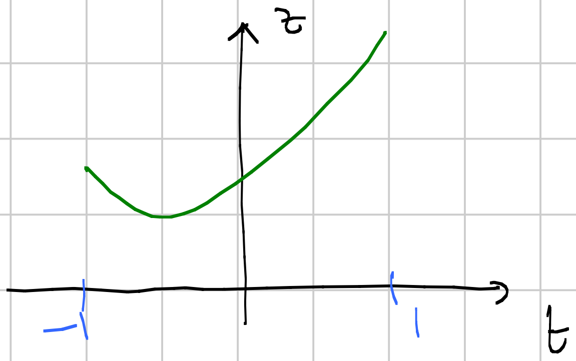
$\varphi_1'(t) = 2t-1 \qquad \varphi_1'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

Max per $t=-1 \rightsquigarrow (-1,-1)$

min per $t=\frac{1}{2} \rightsquigarrow (\frac{1}{2},-1)$

Pezzo $\boxed{2}$ $\{(1,t) : t \in [-1,1]\}$

$$\varphi_2(t) = t^2 + t + 1$$



$\rightarrow$ seguono i p.ti con $t = -\frac{1}{2}$ e con $t = 1$

Pezzo $\boxed{3}$ $\{(t,1) : t \in [-1,1]\}$ $\varphi_3(t) = t^2 + t + 1$

$\rightsquigarrow$ seguono $t = -\frac{1}{2}$ e $t = 1$

Pezzo $\boxed{4}$ $\{(-1,t) : t \in [-1,1]\}$ $\varphi_4(t) = 1 - t + t^2 = \varphi_1(t)$

$\rightsquigarrow$ seguono $t = \frac{1}{2}$ e $t = -1$

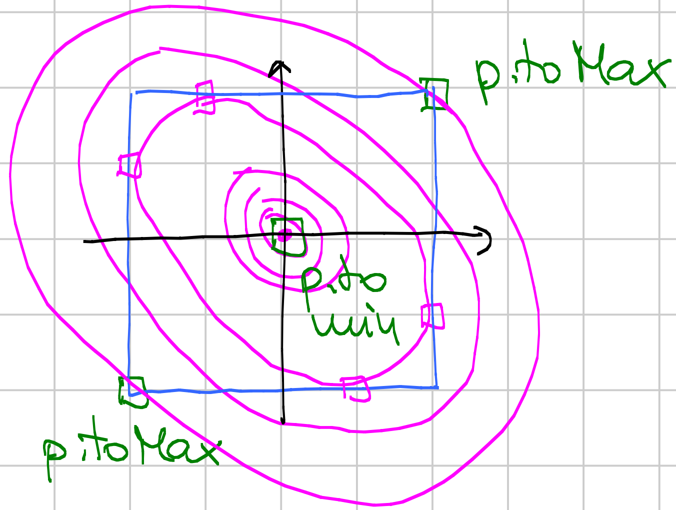
— o —

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 = \underbrace{x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4}} - \frac{y^2}{4} + y^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

È chiaro che $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = 0$

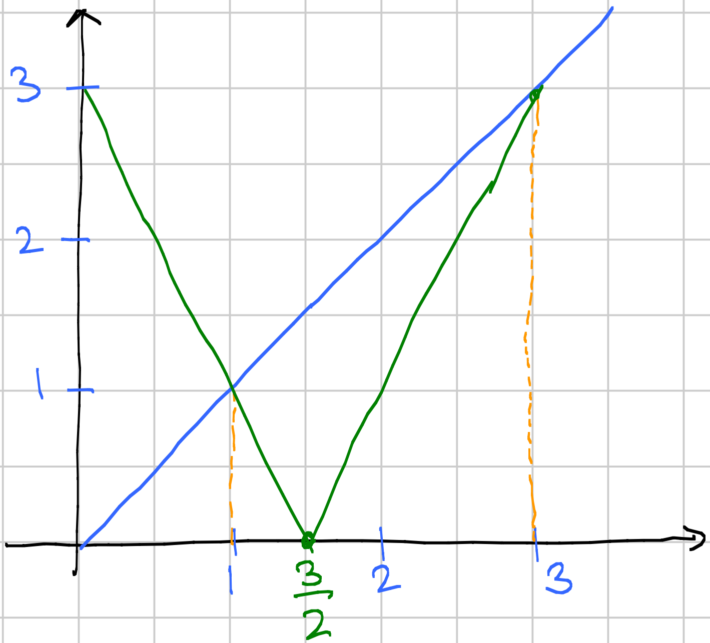
$\Rightarrow (0,0)$ è p.to di min su tutto $\mathbb{R}^2$, e quindi a maggior ragione sul quadrato.



— o — o —

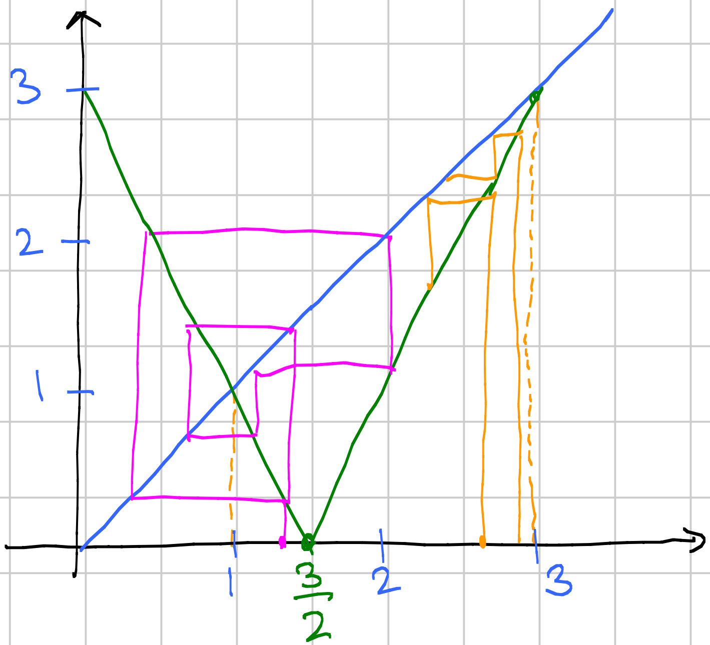
$\boxed{\text{PAG 89}}$

$a_{n+1} = |2a_n - 3| \qquad a_0 = \sqrt{2}$



$\boxed{\text{FATTO 1}}$ $0 \leq a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(se $x \in [0,3]$, anche $f(x) \in [0,3]$)



$\boxed{\text{FATTO 2}}$ Come può comportarsi a_n?

1. $a_n \to +\infty$
2. $a_n \to -\infty$

] ESCLUSI DAL FATTO 1

3. $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$
4. a_n indeterminata

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, chi può essere ℓ?

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\ell = f(\ell) \implies \ell = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ Se $a_n \to 1$, allora definitivamente $0 \leq a_n \leq \frac{3}{2}$

Ma allora, ponendo $d_n = |a_n - 1|$, si dimostra che $d_{n+1} = 2d_n$ (bisogna fare il conto)

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = |f(a_n) - 1| = |3 - 2a_n - 1| =$$

$f(x) = 3-2x$ quando $x \leq \frac{3}{2}$

$$= |2 - 2a_n| = 2|1 - a_n| = 2d_n$$

Il fatto che $d_{n+1} = 2d_n$ impedisce a d_n di tendere a 0, dunque non è possibile che $a_n \to 1$.

$\boxed{\text{FATTO 5}}$ Se a_n tendesse a 3, avrei lo stesso discorso con $d_n = |a_n - 3|$. Quindi ℓ non può essere 3.

$\boxed{\text{FATTO 6}}$ Bisogna escludere che a_n possa essere $= 1$ oppure $= 3$ per un qualche valore di n.

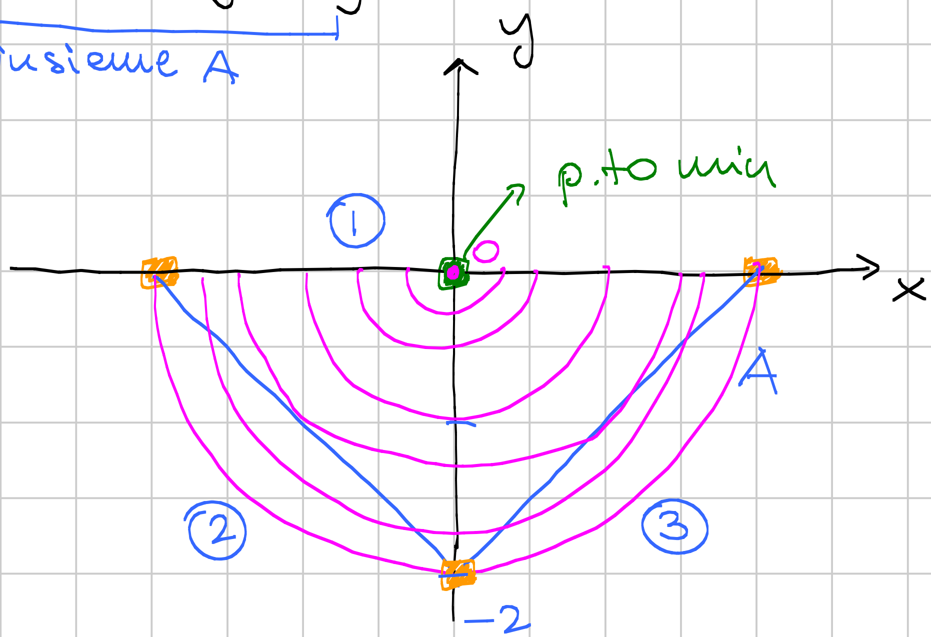
Bisogna usare che $a_0 = \sqrt{2}$.

Si dimostra per induzione (facile) che a_n è sempre della forma $a_n = \alpha + \beta\sqrt{2}$ con $\beta \neq 0$. (α, β interi)

Questo impedisce ad a_n di valere 1 o 3.

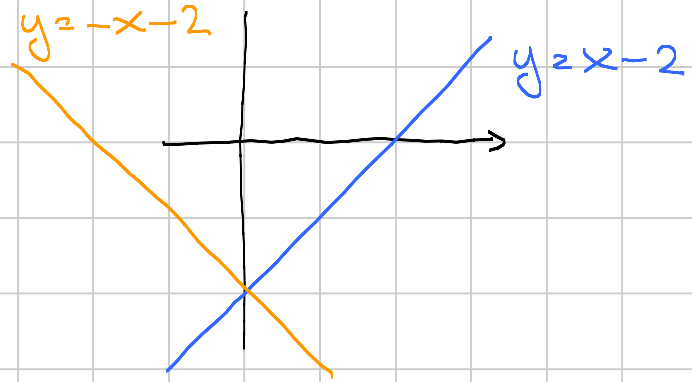
PAG 94

$$\max_{\min} \{ \underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)} : \underbrace{|x|-2 \le y \le 0}_{\text{insieme } A} \}$$



p.ti di max

Se uno volesse parametrizzare



Pezzo ① $= \{ (t,0) : t \in [-2,2] \}$

Pezzo ③ $= \{ (t, t-2) : t \in [0,2] \}$

sta sulla retta di eq.

sulla retta $y = -x - 2$

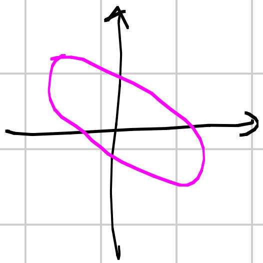
Pezzo ② $= \{ (t, -t-2) : t \in [-2,0] \}$

Insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 3-xy\}$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2+xy-3}_{\Phi(x,y)} = 0\}$$

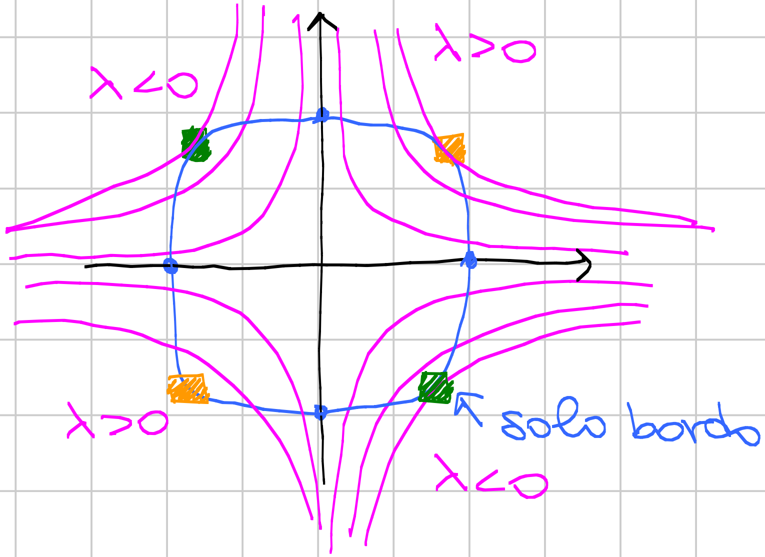
$x^2+xy+y^2=3$

$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 3 \rightarrow$ ellisse storto



—o—o—

$\boxed{\text{PAG 95}}$ $\{\underbrace{xy}_{f(x,y)} : x^2+y^4=1\}$



$\Phi(x,y) = x^2+y^4-1$

1° sistema $\rightarrow$ ... $\rightarrow$ no soluzioni

W $\Rightarrow$ max e min esistono

p.ti di max   p.ti di min.

2° sistema $\to$ $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2\lambda x & \leftarrow \text{Moltiplico per } x \\ x = 4\lambda y^3 & \leftarrow \text{Moltiplico per } y \\ x^2 + y^4 = 1 \end{cases}$

$xy = 2\lambda x^2$

$xy = 4\lambda y^4$

Uguaglio: $\cancel{2}\lambda x^2 = \overset{2}{\cancel{4}}\lambda y^4$

$$\lambda (x^2 - 2y^4) = 0$$

$\lambda = 0$

1ª e 2ª eq.

$\downarrow$

$x = 0, y = 0$

incompatibile con 3ª eq.

$2y^4 = x^2$

$\downarrow$ 3ª eq.

$3y^4 = 1$ $\quad y = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$\downarrow$

$x^2 = 2y^4 = \frac{2}{3}$

$\downarrow$

$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

CANDIDATI: $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right)$

4 PUNTI

$\boxed{\text{PAG } 98}$

$$\begin{matrix}\max \\ \min\end{matrix} \left\{ x^4+y^4+81xy \ : \ (x,y)\in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$\sup = +\infty$.

Supponendo che qualcuno abbia assicurato che il minimo esiste, i p.ti di minimo saranno p.ti stazionari

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^3+81y = 0 \\ 4y^3+81x = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad y = -\frac{4x^3}{81} = -\frac{4x^3}{3^4}$$

$$4y^3+81x =$$

$$= 4\left(-\frac{4x^3}{3^4}\right)^3 + 81x = 0$$

$$= -\frac{4^4}{3^{12}}x^9 + 3^4 x = 0$$

$$-4^4x^9+3^{16}x = 0 \ \to \ x\left(3^{16}-2^8x^8\right) = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$\searrow \ x^8 = \frac{3^{16}}{2^8} \to x = \pm\frac{9}{2}$$

Se $x=0$, allora $y=0$. Se $x=\pm\frac{9}{2}$, allora

$$y=-\frac{4}{3^4}x^3=-\frac{4}{3^4}\left(\pm\frac{3^6}{8}\right)$$

$$=\mp\frac{9}{2}$$

Conclusione: ci sono 3 p.ti stazionari

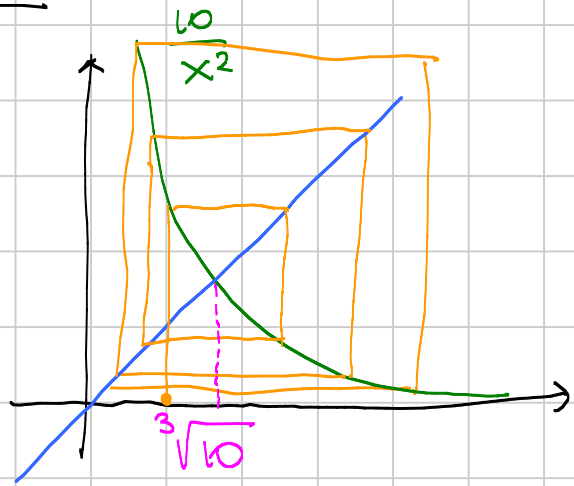
$(0,0)$ $\left(\frac{9}{2},-\frac{9}{2}\right)$ $\left(-\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)$

p.ti di minimo: sostituite!!!

— o — o —

$\boxed{\text{PAG 92}}$ $a_{n+1}=\frac{10}{a_n^2}$ $a_0=1$

$x=\frac{10}{x^2}$ $x^3=10$ $x=\sqrt[3]{10}$



$a_0 = 1 \qquad a_1 = 10 \qquad a_2 = \frac{1}{10} \qquad a_3 = 1000 \qquad a_4 = \frac{10}{1000^2} = \frac{1}{10^5}$

Spiraleggiamento USCENTE !!!

$a_0 = 1 \qquad\qquad a_1 = 10$

$a_2 = \frac{1}{10} \qquad\qquad a_3 = 1000$

$a_4 = \frac{1}{10^5} \qquad\qquad a_5 = 10^{11}$

$a_6 = \frac{1}{10^{21}}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \leq a_{2n+2} \leq a_{2n} \leq 1$ ← sui pari decresce

(ii) $10 \leq a_{2n+1} \leq a_{2n+3}$ ← sui dispari cresce.

$0 \leq a_2 \leq a_0 \leq 1$ si vede sostituendo i valori

$f(a_2) \geq f(a_0) \geq f(1)$

$a_3 \geq a_1 \geq 10$

riapplico f: $\quad f(a_3) \le f(a_1) \le f(10)$

$$a_4 \le a_2 \le 1/10 \le 1$$

$\boxed{\text{FORMALE}}$ Dimostro per induzione che valgono (i) + (ii) (insieme)

$\boxed{n=0}$ si tratta di una verifica

(i) $0 \le a_2 \le a_0 \le 1$

(ii) $10 \le a_1 \le a_3$

$\boxed{\text{P.I.}}$ Ipotesi: (i) + (ii) per un certo valore di n

Tesi: (i) + (ii) con $n+1$ al posto di n

Dim: parto dal pezzo (ii) dell'ipotesi

$$10 \le a_{2n+1} \le a_{2n+3}$$

applico f invertendo i versi

Ottengo

$$f(10) \geq f(a_{2n+1}) \geq f(a_{2n+3})$$

$$1 \geq \frac{1}{1000} \geq \underset{\shortparallel}{a_{2n+2}} \geq \underset{\shortparallel}{a_{2n+4}} \geq 0$$ pezzo (i) della tesi

Riapplico f e ottengo il pezzo (ii) della tesi.

—o—

In conclusione

$a_{2n} \to 0$

$\Rightarrow$ a_n non ha limite!

$a_{2n+1} \to +\infty$