MATEMATICA I

ORA 97

Titolo nota 18/12/2007

Eq. Diff. lineari non omogenee:

$\boxed{\text{METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI}}$

Serve per trovare UNA soluzione di un' eq. non omog.

Esempio $u'' + 3u' - 4u = e^{2t}$

Risolvo eq. omogenea $u'' + 3u' - 4u = 0$

$\rightsquigarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightsquigarrow (x+4)(x-1) = 0 \rightsquigarrow x = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

Soluz. gen. eq. omogenea

$$\boxed{u(t) = a e^{t} + b e^{-4t}}$$

Cerco una soluzione dell'eq. non omog. della forma

$$u(t) = a(t)\, e^{t} + b(t)\, e^{-4t}$$

Quelle che prima erano costanti, ora variano

dove $a(t)$ e $b(t)$ sono 2 funzioni da determinare.
Obiettivo: scrivere un sistema nelle incognite $a'(t)$ e $b'(t)$.

Derivo u e sostituisco nell'equazione

$$u'(t) = \underbrace{a'(t)\, e^{t}} + a(t)\, e^{t} + \underbrace{b'(t)\, e^{-4t}} - 4b(t)\, e^{-4t}$$

Impongo che

$$\boxed{a'(t)\, e^{t} + b'(t)\, e^{-4t} = 0}$$

1ª equazione

$$u''(t) = a'(t)\, e^{t} + a(t)\, e^{t} - 4b'(t)\, e^{-4t} + 16\, b(t)\, e^{-4t}$$

Sostituisco u'', u' e u nell' eq. $\boxed{\text{non}}$ omog.:

$$a' e^{t} + \cancel{a e^{t}} - 4 b' e^{-4t} + \cancel{16 b e^{-4t}} \qquad u''$$

$$+ \cancel{3a e^{t}} - \cancel{12 b e^{-4t}} \qquad +3u'$$

$$- \cancel{4a e^{t}} - \cancel{4 b e^{-4t}} \quad = \qquad -4u$$

$$e^{2t} \qquad = e^{2t}$$

I termini con $a(t)$ e $b(t)$ DEVONO andare via.
Restano solo i termini in $a'(t)$ e $b'(t)$

$$\boxed{a'(t) e^{t} - 4 b'(t) e^{-4t} = e^{2t}}$$

2^a equazione

Sistema
$$\begin{cases} a'(t) e^{t} + b'(t) e^{-4t} = 0 \\ a'(t) e^{t} - 4 b'(t) e^{-4t} = e^{2t} \end{cases}$$

SISTEMA LINEARE in $a'(t)$ e $b'(t)$

1^a eq. $-$ 2^a eq. : $\quad 5 b'(t) e^{-4t} = - e^{2t}$

$$\Rightarrow \quad b'(t) = -\frac{1}{5} e^{6t}$$

Dalla 1^a eq. ricavo

$$e^t a'(t) = - b'(t) e^{-4t} \quad \Rightarrow \quad a'(t) = - b'(t) e^{-5t}$$

$$= \frac{1}{5} e^t$$

Quindi: $\quad a'(t) = \frac{1}{5} e^t \quad , \quad b'(t) = -\frac{1}{5} e^{6t}$

$$\Rightarrow \quad a(t) = \frac{1}{5} e^t \quad , \quad b(t) = -\frac{1}{30} e^{6t}$$

$$\frac{1}{5} e^{2t} - \frac{1}{30} e^{2t} = \boxed{\frac{1}{6} e^{2t}}$$

Conclusione:

$$u(t) = a(t) e^t + b(t) e^{-4t} = \frac{1}{5} e^t \cdot e^t - \frac{1}{30} e^{6t} \cdot e^{-4t} =$$

Soluzione generale eq. non omogenea:

$$u(t) = \underbrace{a e^{t} + b e^{-4t}}_{\text{SOL. GEN. EQ. OMOG.}} + \underbrace{\frac{1}{6} e^{2t}}_{\text{SOLUZ. EQ. NON OMOGENEA APPENA TROVATA}}$$

— o — o —

Il metodo funziona per equazioni di ordine qualunque (anche NON a coeff. costanti, però in questo caso non è detto che si trovi una base delle soluz. dell'eq. omogenea.)

<u>Oss.</u> In particolare funziona per equazioni di ordine 1.

<u>Esempio</u> $u' + \frac{1}{t} u = \sin t$ (rientra in quelle $u' + a(t) u = b(t)$)

si potrebbe fare con il fattore integrante.

① Risolvo l'omogenea

$$u' + \frac{1}{t} u = 0$$

Questa si può vedere come eq. a variabili separabili

$$u' = -\frac{1}{t}u \qquad \frac{du}{dt} = -\frac{1}{t}u \qquad \frac{du}{u} = -\frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dt}{t}$$

$$\log|u| = -\log|t| + c$$

$$|u| = e^{-\log|t|+c} = c\,e^{-\log|t|}$$

$$= c\,e^{\log\frac{1}{|t|}} = c\,\frac{1}{|t|}$$

Soluz. generale equazione omogenea: $\boxed{u(t) = \frac{c}{|t|}}$

Passando all' eq. non omogenea, cerco una soluzione mediante variazione delle costanti, cioè del tipo

$$u(t) = \frac{c(t)}{|t|} \leftarrow$$ faccio variare la costante

Supponendo per semplicità $t > 0$

$$u(t) = \frac{c(t)}{t}, \qquad u'(t) = \frac{c'(t)}{t} - c(t)\frac{1}{t^2}$$

Sostituisco nell' equazione

$$u' + \frac{u}{t} = \sin t$$

$$\frac{c'(t)}{t} \underbrace{- \cancel{c(t) \cdot \frac{1}{t^2}} + \cancel{\frac{c(t)}{t^2}}}_{} = \sin t$$

i termini con la sola $c(t)$
DEVONO andare via

Resta un' equazione in c' : $\quad c'(t) = t \sin t$

$$\leadsto \quad c(t) = -t \cos t + \sin t$$

$$\leadsto \quad u(t) = \frac{c(t)}{t} = \boxed{-\cos t + \frac{\sin t}{t}}$$

Conclusione: soluz. gen. eq. non omogenea

$$u(t) = \underbrace{\frac{c}{t}}_{\text{SOL. GEN. EQ. OMOG.}} \underbrace{- \cos t + \frac{\sin t}{t}}_{\text{SOL. APPENA TROVATA}}$$

Esercizio: controllare che venga uguale con il fattore integrante.