MATEMATICA I

ORA 93 (-7)

Titolo nota 13/12/2007

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI ORDINE n coeff. costanti

$$\boxed{a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)}$$

CASO OMOGENEO : $f(t) \equiv 0$

Teorema L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. lineare omogenea (anche a coeff. $\boxed{\text{non}}$ costanti).

è uno $\boxed{\text{SPAZIO VETTORIALE di DIM. } n}$

Cosa vuol dire? * La somma di 2 soluzioni è ancora una sol.

* se prendo una soluz. e la moltiplico per un numero ottengo ancora una soluz.

Dim. Siano u e v 2 soluzioni

$$a_n(t)\, u^{(n)} + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\, u' + a_0(t)\, u = 0$$

$$a_n(t)\, v^{(n)} + a_{n-1}(t)\, v^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\, v' + a_0(t)\, v = 0$$

Chiamo $w = u+v$. Sommando le eq. ottengo

$$a_n(t) \underbrace{[u^{(n)} + v^{(n)}]}_{w^{(n)}} + a_{n-1}(t) \underbrace{[u^{(n-1)} + v^{(n-1)}]}_{w^{(n-1)}} + \dots + a_0(t) \underbrace{[u+v]}_{w} = 0$$

$\Rightarrow$ w risolve la stessa equazione

Se ora chiamo $z = \lambda u$, dove λ è un numero

z è soluzione

$$a_n(t) \underbrace{\lambda u^{(n)}}_{z^{(n)}} + a_{n-1}(t) \underbrace{\lambda u^{(n-1)}}_{z^{(n-1)}} + \dots + a_1(t) \underbrace{\lambda u'}_{z'} + a_0(t) \underbrace{\lambda u}_{z} = 0$$

In uno spazio di dim n ogni elemento si scrive come combinazione lineare degli elementi di una BASE.

$$\boxed{u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t)}$$

soluz. generale dipendente da n parametri

dove $c_1, \dots, c_n$ sono numeri arbitrari e $u_1(t), \dots, u_n(t)$ sono gli elementi della base

Operativamente: se conosco una base conosco la soluz. generale.

Perchè la dimensione è n? Perchè quando ho un problema di Cauchy la soluzione è univocamente determinata dalle $\boxed{n}$ condizioni iniziali. Posso scegliere le condiz. lin. indip. con tutte le derivate $=0$ tranne una che vale 1.

Come determinare la BASE? Se l'eq. è a coeff. costanti, c'è una procedura per farlo.

$\boxed{\text{Caso particolare } n=2}$ $\quad a u'' + b u' + c u = 0$

Polinomio associato all'equazione (pol. caratteristico)

$$a x^2 + b x + c = 0$$

Trovo le radici del polinomio

→ Caso 1: 2 radici reali distinte ($\Delta > 0$) : λ, μ

Una base è $\quad e^{\lambda t}, \; e^{\mu t}$

Quindi la soluz. generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t} \qquad u(t) = a e^{\lambda t} + b e^{\mu t}$$

→ <u>Caso 2</u> : 2 radici reali coincidenti $(\Delta = 0)$
(cioè una radice λ di molteplicità 2)

Una base è $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$

Quindi la soluz. generale è

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b t e^{\lambda t}$$

<u>Oss.</u> $e^{\lambda t}$ e $te^{\lambda t}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI
(per essere linearmente dipendenti il coeff. di molteplicità deve essere un numero)

→ <u>Caso 3</u> 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ $(\Delta < 0)$

Una base è $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

<u>Sol. gen.</u> : $u(t) = a e^{\alpha t}\cos(\beta t) + b e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

"Dim": basta sostituire nell'equazione e vedere che gli elementi della base sono soluzioni !!!

Esempio 1 $\quad u'' + 5u' + 6u = 0 \quad$ Eq.

Polinomio $\quad x^2 + 5x + 6 = 0 \quad (x+3)(x+2) = 0$

Radici: $\quad x = -3 \quad x = -2 \quad$ reali distinte

Sol. gen.: $\quad u(t) = a e^{-3t} + b e^{-2t}$

Esempio 2 $\quad u'' - 4u' + 4u = 0$

Polinomio $\quad x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (x-2)^2 = 0$

$x = 2$ è radice di molteplicità 2

Sol. gen.: $\quad u(t) = a e^{2t} + b t e^{2t}$

Esempio 3 $\quad u'' + 4u' + 13u = 0$

Polinomio: $\quad x^2 + 4x + 13 = 0$

Radici: $\quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i$

$= \alpha \pm i\beta$

con $\alpha = -2$ e $\beta = 3$

Base: $\quad e^{-2t}\cos(3t),\ e^{-2t}\sin(3t)$

Soluz. generale: $\quad u(t) = a e^{-2t}\cos(3t) + b e^{-2t}\sin(3t)$

$$= e^{-2t}\left(a\cos(3t) + b\sin(3t)\right)$$

Esempio 4 $\quad u'' - 4u = 0 \rightsquigarrow x^2 - 4 = 0 \quad x = \pm 2$

Soluz. generale: $\quad u(t) = a e^{2t} + b e^{-2t}$

Esempio 5 $\quad u'' + 7u' = 0$

$x^2 + 7x = 0 \qquad x(x+7) = 0 \qquad x = \begin{cases} 0 \\ -7 \end{cases}$

Base: $\quad e^{0t} = 1 \qquad e^{-7t}$

Soluz. generale: $\quad u(t) = a + b e^{-7t}$

↓ 1° el. della base è 1

Esempio 6 $\quad u'' + 7u = 0 \qquad x^2 + 7 = 0$

$x^2 = -7 \qquad x = \pm\sqrt{7}\, i \qquad (\alpha \pm i\beta$ con $\alpha = 0,\ \beta = \sqrt{7})$

Base: $\quad \underbrace{e^{0t}}_{=1} \cos(\sqrt{7}\,t), \quad \underbrace{e^{0t}}_{=1} \sin(\sqrt{7}\,t)$

Sol. gen.: $\quad u(t) = a\cos(\sqrt{7}\,t) + b\sin(\sqrt{7}\,t)$

Perché funzionano queste cose? $au'' + bu' + cu = 0$

È ragionevole cercare una soluzione del tipo $u(t) = e^{\lambda t}$

Sostituisco nell' equazione: $u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ $u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$au'' + bu' + cu = a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t}$$

$$= e^{\lambda t}(a\lambda^2 + b\lambda + c)$$

→ se λ è una radice del polinomio ho trovato una sol.
(se il polinomio ha 2 radici, ho trovato 2 soluz. lin. indip. dunque una base)

Supponiamo $\lambda = \alpha + i\beta$ $u(t) = e^{(\alpha + i\beta)t} =$

$$= e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$