MATEMATICA I

ORA 92

Titolo nota 12/12/2007

Esercizio $\begin{cases} u' = u \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

① **Separare**: $u' = u$, $\dfrac{du}{dt} = u$, $\dfrac{du}{u} = dt$

② **Integrare**: $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \int dt \longrightarrow \log|u| = t + c$

③ **Ricavare**: $|u| = e^{t+c} \longrightarrow u(t) = \boxed{\pm}\, e^{t+c}$

possibilità di scegliere il segno

Oppure

$u(t) = \pm\, e^{t} \cdot \boxed{e^{c}} \longrightarrow u(t) = \boxed{C} \cdot e^{t}$

costante > 0

costante qualunque che ingloba il $\pm$

Scrivendo $u(t) = c \cdot e^t$ ammetto anche il caso $c=0$, che corrisponde alla soluzione $u(t) \equiv 0$ che comunque va considerata.

④ <u>Determinare c in funzione di α</u> $\qquad u(0) = \alpha$

$$u(0) = c \cdot e^0 = c = \alpha$$

Soluz. problema di Cauchy: $\boxed{u(t) = \alpha e^t}$

⑤ ... ⑥ Qualunque sia $\alpha \in \mathbb{R}$, c'è esistenza globale nel passato e nel futuro.

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\begin{cases} u' = t^2 u \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

① $\dfrac{du}{dt} = t^2 u \qquad \dfrac{du}{u} = t^2 dt$

② $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \int t^2 dt$

$$\log |u| = \frac{t^3}{3} + c$$

③ $|u| = e^{t^3/3 + c}$

$\rightarrow \quad u(t) = \pm e^{t^3/3 + c} = \boxed{\pm e^{t^3/3} \cdot e^{c}}$

Nuova costante di segno qualunque

Soluz. generale:

$$u(t) = c\, e^{t^3/3}$$

④ Determino c $\qquad u(0) = c = \alpha$

Sol. pb. Cauchy : $\boxed{u(t) = \alpha\, e^{t^3/3}}$

Esistenza globale per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

— o — o —

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

① $\dfrac{du}{dt} = u^2 \qquad \dfrac{du}{u^2} = dt$

② $\displaystyle\int \frac{du}{u^2} = \int dt \; ; \quad -\frac{1}{u} = t + c$

③ $\boxed{u(t) = -\dfrac{1}{t+c}}$

Soluzione generale

(si perde $u(t) \equiv 0$)

④ <u>Determino c</u> $\quad u(0) = -\frac{1}{c} = \alpha \Rightarrow c = -\frac{1}{\alpha}$

Sol. pb. Cauchy:

$$u(t) = -\frac{1}{t-\frac{1}{\alpha}} = -\frac{1}{\frac{\alpha t - 1}{\alpha}} = \boxed{\frac{\alpha}{1-\alpha t}}$$

⑥ Per quali α c'è esistenza globale per $t \geq 0$?

$u(t)$ ha problemi quando $1-\alpha t = 0$, cioè per $t = \frac{1}{\alpha}$.

Quindi:

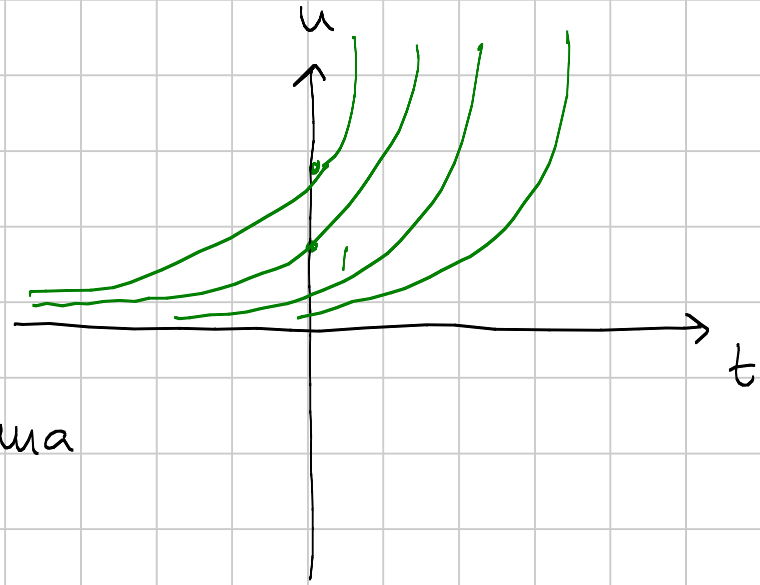
↗ se $\alpha > 0$ ho problemi per $t = \frac{1}{\alpha} > 0$ (BLOW-UP)

↘ se $\alpha < 0$ ho problemi per $t = \frac{1}{\alpha} < 0$ (esistenza globale per $t \geq 0$)

Disegno $u(t)$ per un po' di valori di α

$$\alpha = 1 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{1-t}$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow u(t) = \frac{2}{1-2t}$$



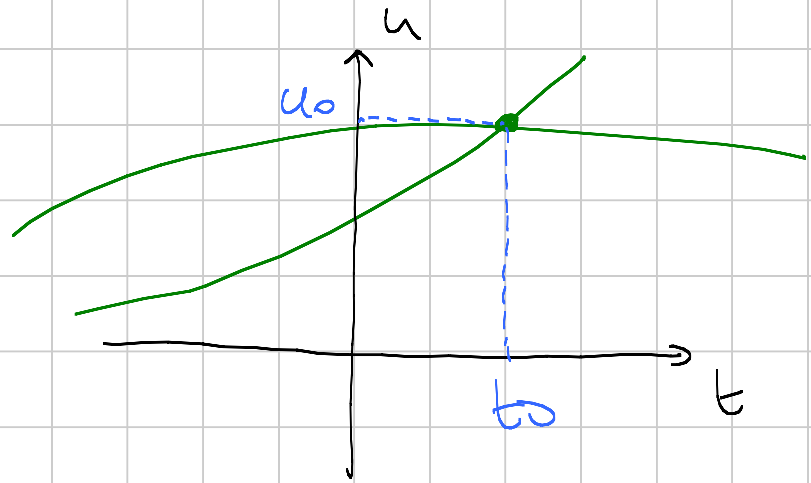
Qualunque sia $\alpha > 0$ ho un problema per un qualche $t > 0$

Domanda: possono 2 soluzioni con α diverso incontrarsi?

No! Vorrebbe dire che il problema di Cauchy con condizione iniziale

$$u(t_0) = u_0$$

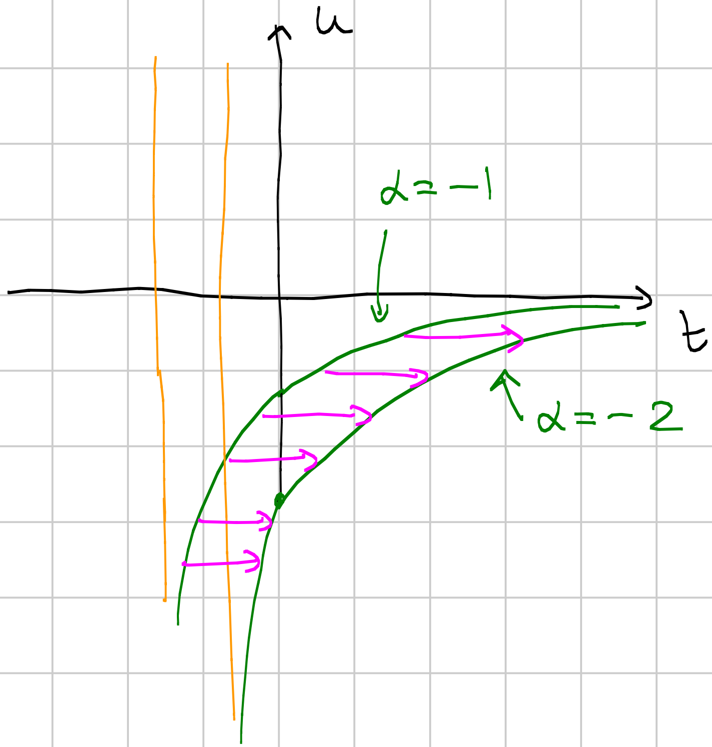
ha almeno 2 soluzioni, cosa che è vietata dal teorema di unicità



$\alpha = -1$

$$u(t) = \frac{-1}{1+t}$$

$\alpha = -2 \rightarrow u(t) = \dfrac{-2}{1+2t}$



$\boxed{\text{Osservazione generale}}$

Se l'equazione è autonoma

$u' = f(u)$, allora tutte le traslate di una soluzione sono a loro volta soluzioni

(Nell'esempio di sopra la soluzione con $\alpha = -2$ si ottiene traslando quella con $\alpha = -1$ verso dx di $1/2$

Perché è vero? Sia $u(t)$ una soluzione. Allora
$u'(t) = f(u(t))$ per ogni $t \in$ insieme di def. di u

Considero $v(t) = u(t+a)$ dove a indica di quanto traslo

$v'(t) = u'(t+a)$
$f(v(t)) = f(u(t+a))$ $\rightsquigarrow$ $v' = f(v)$, cioè v è ancora una soluzione.

HO USATO CHE L'EQ. È AUTONOMA.

—o—o—

Esercizio...
$$\begin{cases} u' = e^{t+u} \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

1 $u' = e^{t+u} = e^t \cdot e^u$

$$\frac{du}{dt} = e^t \cdot e^u$$

$$\frac{du}{e^u} = e^t \, dt$$

$$e^{-u} \, du = e^{+t} \, dt$$

(2) $\int e^{-u}\,du = \int e^{t}\,dt \qquad -e^{-u} = e^{t} + c$

(3) Ricavare: $e^{-u} = -e^{t} + c \rightarrow -u = \log(c - e^{t})$

$\rightarrow u(t) = -\log(c - e^{t}) = \log\left(\frac{1}{c - e^{t}}\right)$

(4) Determinare c: $u(0) = \alpha$

$\log\left(\frac{1}{c-1}\right) = \alpha \rightarrow \frac{1}{c-1} = e^{\alpha}$

$\rightarrow c - 1 = e^{-\alpha} \rightarrow c = 1 + e^{-\alpha}$

Sol. generale: $u(t) = \log\left(\frac{1}{1 + e^{-\alpha} - e^{+t}}\right)$

Domanda:
per quali α
c'è esist. gl.
per $t \geq 0$?