MATEMATICA I

ORA 31

Titolo nota

12/12/2007

Perché funziona la procedura per eq. diff. a var. separabili

$$\begin{cases} u' = u^2 \cdot e^t \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

Sappiamo per il teo. generale che la soluzione esiste. Divido per $u(t)$

$$u'(t) = u^2(t) \cdot e^t \qquad \frac{u'(t)}{u^2(t)} = e^t$$

Integro a destra e sinistra rispetto alla variabile t (integro con estremi 0 e t)

$$\int_0^t \frac{u'(t)}{u^2(t)}\, dt = \int_0^t e^t\, dt \qquad \int_0^t \frac{u'(s)}{u^2(s)}\, ds = \int_0^t e^s\, ds$$

così non va bene — così va meglio

$$\int_0^t e^s\,ds = \left[e^s\right]_{s=0}^{s=t} = e^t - 1$$

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{u^2(s)}\,ds$$

Cambio variabile ponendo $y = u(s)$
$dy = u'(s)\,ds$

Quando $s=0$, ho che $y = u(0) = 7$ (cond. iniz.)
Quando $s=t$, ho che $y = u(t)$

$$\int_0^t \frac{\overbrace{u'(s)\,ds}^{dy}}{u^2(s)} = \int_7^{u(t)} \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y}\right]_{y=7}^{y=u(t)} = \frac{1}{7} - \frac{1}{u(t)}$$

Uguagliando i 2 integrali ottengo

costante che dipende dal dato iniziale

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{u(t)} = e^t - 1, \quad \text{cioè} \quad -\frac{1}{u(t)} = e^t \boxed{-1-\frac{1}{7}}$$

<u>Esempio 1</u> $\begin{cases} u' = u^2 \cdot e^t \\ u(0) = 0 \end{cases}$

①, ②, ③ come prima portano a $u(t) = \dfrac{1}{c - e^t}$

④ <u>Determinare c</u> $u(0) = 0 \rightsquigarrow \dfrac{1}{c-1} = 0 \rightsquigarrow c = ?$

La procedura non funziona

<u>N.B.</u> La soluzione DEVE esistere (ed essere unica) per il teo. generale

In questo caso la soluzione è la funzione costante

$\boxed{u(t) \equiv 0}$ Int. max. di esistenza: $\mathbb{R}$ $T = +\infty$

$\Rightarrow$ esistenza globale

Esempio 2 $\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = \pi \end{cases}$

$\Rightarrow$ La soluzione è la costante $\boxed{u(t) \equiv \pi}$ (esist. globale)

Verifica: $u'(t) = 0$ $\quad \sin u(t) = \sin \pi = 0$

— o —

In generale per l'eq. $u' = f(u) \cdot g(t)$ la soluzione è costante quando il dato iniziale

$$u(t_0) = u_0$$

soddisfa $f(u_0) = 0$. In questo caso $u(t) \equiv u_0$.

— o —

Esempio 3 $\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = 2 \end{cases}$

$u'(t) = 0$

$\log u(t) = \log 2 \neq 0$

SOL. COSTANTE $u(t) \equiv 1$ $\qquad$ $u(t) \equiv 2$ NON è soluzione

Esempio 4 Se $u' = \log u$ e $u(0) = 7$, quanto vale $u'(0)$?

$$u'(0) = \log u(0) = \log 7$$

Se $u(7) = 22$, quanto vale $u'(7)$?

$$u'(7) = \log u(7) = \log 22.$$

— o —

Esempio 5
$$\begin{cases} u' = u^3 \cos t \\ u(0) = -2 \end{cases}$$

① Separare : $\frac{du}{dt} = u^3 \cos t$ $\frac{du}{u^3} = \cos t \cdot dt$

② Integrare : $\int \frac{du}{u^3} = \int \cos t \, dt$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = \sin t + c$$

③ Ricavare $\quad -\frac{1}{u^2} = 2\sin t + \boxed{c} \qquad \frac{1}{u^2} = \boxed{c} - 2\sin t$

può restare sempre la stessa

$$u^2 = \frac{1}{c - 2\sin t} \qquad \boxed{u(t) = \pm\sqrt{\frac{1}{c - 2\sin t}}}$$

SOLUZIONE GENERALE

④ Determino c $\quad$ Scelgo sol. gen. con segno $-$

$$u(0) = -2 \qquad +\sqrt{\frac{1}{c - 2\sin 0}} = +2 \qquad \frac{1}{\sqrt{c}} = 2$$

$$\sqrt{c} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{4}$$

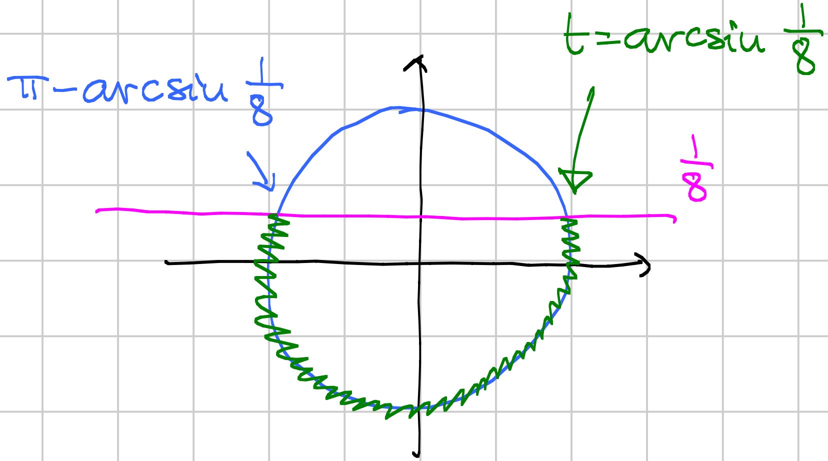
Soluz. problema di Cauchy !

$$u(t) = -\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4} - 2\sin t}} = \boxed{-\sqrt{\frac{4}{1 - 8\sin t}}}$$

⑤ Controllare (esercizio!)

⑥ Studiare. Perché $u(t)$ abbia senso deve essere

$$1 - 8\sin t > 0, \quad \text{quindi} \quad 8\sin t < 1, \quad \sin t < \frac{1}{8}$$



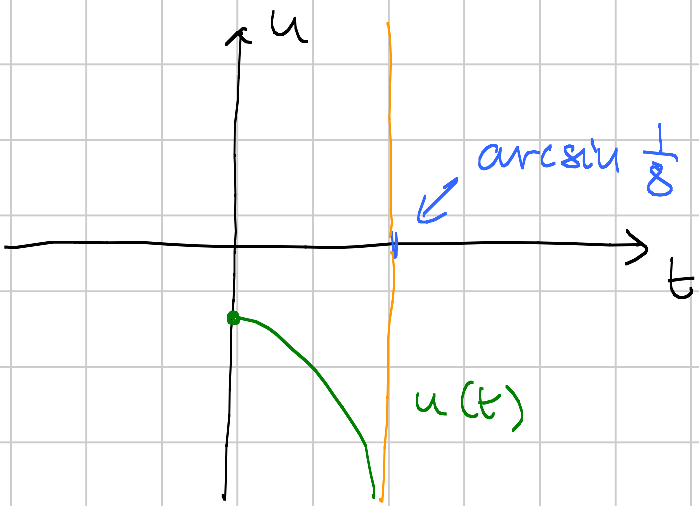
Tempo di vita

$$T = \arcsin \frac{1}{8}$$

Intervallo massimale di esistenza:

$$\left(-\pi - \arcsin \frac{1}{8}, \arcsin \frac{1}{8}\right)$$

$$\lim_{t \to T^-} u(t) = -\infty \Rightarrow \text{blow up.}$$



Variante dell'esercizio $\begin{cases} u' = u^3 \cos t \\ u(0) = +\alpha > 0 \end{cases}$

Domanda: esistono dei valori di α per cui la soluzione ha esistenza globale nel futuro?

①, ②, ③ come prima $\quad u(t) = \pm\sqrt{\dfrac{1}{c - 2\sin t}}$

④ <u>Determino c</u> in funzione del parametro α

$u(0) = \alpha \qquad \sqrt{\dfrac{1}{c - 2\sin 0}} = \alpha \;; \quad \dfrac{1}{c} = \alpha^2 \Rightarrow c = \dfrac{1}{\alpha^3}$

Soluzione generale (in funzione di α):

$$u(t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\alpha^2} - 2\sin t}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha^2 \sin t}} = \boxed{\alpha\sqrt{\frac{1}{1 - 2\alpha^2 \sin t}}}$$

Esistono valori di α per cui $u(t)$ è definita per ogni $t \geq 0$.
Deve succedere che

$$1 - 2\alpha^2 \sin t \overset{(>)}{\neq} 0 \quad \forall t \geq 0, \text{ cioè}$$

$$2\alpha^2 \sin t \overset{(<)}{\neq} 1, \quad \text{cioè} \quad \sin t \overset{<}{\neq} \boxed{\frac{1}{2\alpha^2}}$$

Deve essere > 1 (non potendo essere < -1)

$$\frac{1}{2\alpha^2} > 1, \quad \text{cioè} \quad \alpha^2 < \frac{1}{2}, \quad \text{cioè} \quad \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(stiamo considerando solo gli $\alpha > 0$)

— o — o —

Cosa succede se $u(0) = 0$? La soluzione è la costante $u(t) \equiv 0$