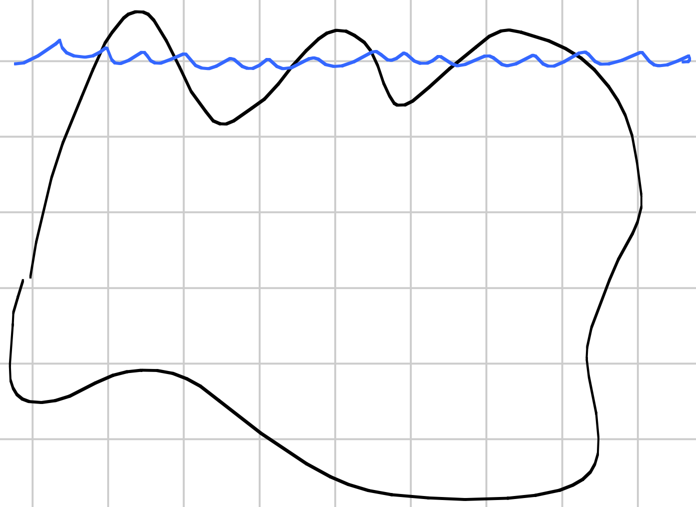
EQUAZIONI DIFFERENZIALI



Un' eq. diff. è un' equazione in cui l' incognita è una funzione

$y(x)$, $y(t)$, $\boxed{u(t)}$

Questa funzione deve soddisfare una relazione che lega u ad un po' di sue derivate.

Esempi

$u'(t) = u(t)$ → cerco una funzione u che sia uguale alla sua derivata

$u''(t) + [u'(t)]^2 = \arctan[u(t)]$

Per quali t deve valere la relazione? BELLA DOMANDA!!!

$u''(t) = t^2 u(t)$

<u>Notazione rapida</u> Non si mettono le t che sono "argomento della u"

$u' = u$

$u'' + [u']^2 = \arctan u$

} AUTONOME: la t compare solo come variabile da cui dipende la u

$u'' = t^2 u$ } NON AUTONOMA: la t compare anche fuori dalle u.

In generale un' eq. diff. si presenta nella forma

$$\Phi(t, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0$$

Si dice ORDINE di un' eq. diff. il MASSIMO ordine di derivazione che compare nell' eq. stessa

$u' = u$ → 1° ordine Forma normale

$u'' + [u']^2 = \arctan u$ → 2° ordine Si porta facilmente in forma normale

$u'' = t^2 u$ → 2° ordine Forma normale

Un' eq. diff. si dice IN FORMA NORMALE se "la derivata di ordine max è ricavata rispetto al resto"

$$u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

Esempi

$(u')^2 = \sin u$

$(u')^3 = \sin u$

AUTONOME
1° ORDINE

Non si può portare in FORMA NORMALE

$u' = \sqrt[3]{\sin u}$ FORMA NORMALE

EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE A VARIABILI SEPARABILI

1ª ISOLA

$$\boxed{u' = f(u)\,g(t)}$$

Eq. diff. 1° ordine in forma normale in cui il secondo membro è prodotto di una funzione della sola t per una funzione della sola u.

<u>Esempi</u>

$$u' = \underbrace{t}_{g(t)} \cdot \underbrace{\cos u}_{f(u)}$$

$$u' + t = u \cdot t \qquad u' = u \cdot t - t = \underbrace{t}_{g(t)}\underbrace{(u-1)}_{f(u)}$$

$$u' = u^2 \longrightarrow u' = \underbrace{u^2}_{f(u)} \cdot \underbrace{1}_{g(t)}$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Tutte le eq. diff. del 1° ORDINE AUTONOME in forma normale sono del tipo

$$u' = f(u)$$

dunque sono a variabili separabili (con $g(t) \equiv 1$)

— o — o —

EQUAZIONI LINEARI

Un'eq. differenziale si dice LINEARE se è della forma "combinazione lineare di u e delle sue derivate":

$$\boxed{a_n(t)\, u^{(n)} + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\, u' + a_0(t)\, u = f(t)}$$

$a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ si dicono COEFFICIENTI

$f(t)$ si dice TERMINE NOTO (secondo membro)

Esempi $\quad u'' + t\,u' + u = \cos t$ ← termine noto

2° ordine lineare. I coeff. sono $a_2(t) = 1$, $a_1(t) = t$, $a_0(t) = 1$

$\boxed{1}$ $u'' + \boxed{\log(1+\cos^2 3t)}\,u' + \boxed{e^{\sin t}} \cdot u = \sin t$

Lineare

$u'' + u^2 = 0$ Non è lineare perché c'è u^2.

$u' + \cos t \cdot u = 0$ lineare

$u' + \boxed{\cos u}\, t = 0$ NON lineare

$u' + \boxed{\cos(t u)} = 0$ NON LINEARE

Un' eq. lineare si dice

→ OMOGENEA se $f(t) = 0$

→ NON OMOGENEA se $f(t) \neq 0$

→ A COEFFICIENTI COSTANTI se $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t), a_n(t)$ sono dei NUMERI

<u>Esempi</u> $u'' + 3u' + tu - t^2 = 0$ 2° ordine, lineare, a coeff. NON costanti, NON omogenea (il termine noto è t^2)

Df: un' eq. diff. lineare a coeff. costanti è AUTONOMA?
NO! Potrebbe esserci $f(t)$ $u'' + 3u' + 5u = t^3$

D2: un' eq. diff. lineare autonoma è a coeff. costanti? SI

D3: un' eq. diff. lineare autonoma è OMOGENEA?

NO !!! $u'' + 3u' + 5u = \boxed{27}$ termine noto

$\boxed{2^o \text{ ISOLA}}$ Eq. diff. del $\boxed{1^o \text{ ordine lineari}}$ con coeff. di $u' = 1$

$$\boxed{u' + a(t)\, u = b(t)}$$

Oss. a patto di poter dividere per il coeff. di u' si arriva sempre in questa forma

$\boxed{3^a \text{ ISOLA}}$ Eq. diff. di ordine qualunque lineari a coeff. costanti

$$\boxed{a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)}$$

Gli a_i sono NUMERI, $f(t)$ c'è se l'eq. è NON OMOGENEA

Primi esempi di soluzione

$u' = u$ $\rightsquigarrow$ $u(t) = e^t$ è UNA SOLUZIONE
(controllo $u'(t) = e^t = u(t)$ vera $\forall t \in \mathbb{R}$)

$u(t) = e^t + 7$ NON è una soluzione:

$$u'(t) = e^t \neq u(t)$$

$\rightsquigarrow$ $u(t) = 7e^t$ è UNA soluzione: $u'(t) = 7e^t = u(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

In generale $u(t) = ce^t$ è una soluzione

$\rightsquigarrow$ l'eq. ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro

$u' = -u^2$ $\qquad$ $u(t) = \frac{1}{t}$ è UNA soluzione

$$u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2 \qquad \boxed{\forall t \neq 0}$$

In generale $\quad u(t) = \frac{1}{t+c}$ è UNA soluzione

$$u'(t) = -\frac{1}{(t+c)^2} = -[u(t)]^2 \qquad \forall t \neq -c$$

Ancora una volta infinite soluz. dipendenti da un parametro
[N.B. anche $u(t) \equiv 0$ è una soluz.)

—o—o—

$u'' = -u$ $\qquad$ $u(t) = \sin t$ è UNA soluzione

$$u''(t) = -\sin t = -u(t)$$

$u(t) = e^{-t}$ non è una sol. perchè $u'(t) = -e^{-t}$ e
$u''(t) = e^{-t} = u(t)$ e
non $-u(t)$

$u(t) = \cos t$ è un'altra soluzione

In generale anche $u(t) = c \sin t$ e $u(t) = c \cdot \cos t$ sono soluz.,
ma ancora meglio

$$u(t) = a \sin t + b \cos t$$

è una soluzione qualunque siano i valori dei parametri a e b

(infatti $u''(t) = -a \sin t - b \cos t = -u(t)$)

FATTO GENERALE Un'eq. diff. di ordine n ha infinite soluzioni dipendenti da n parametri

PROBLEMA DI CAUCHY

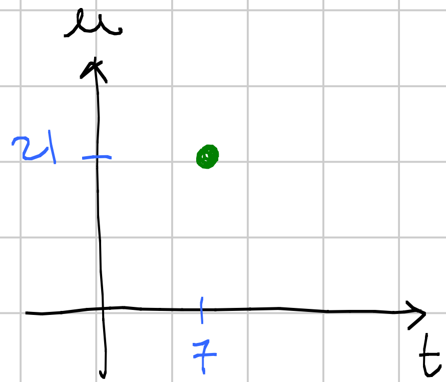
$\longrightarrow$ Equazione differenziale + $\boxed{\text{Condizioni iniziali}}$

Le condizioni iniziali sono tante quante è l'ordine dell'eq.

Se l'eq. è di ordine n, le condizioni iniziali prescrivono il valore di u e di tutte le sue derivate fino alla $(n-1)$-esima per uno stesso valore t_0 di t.

<u>Esempi vari</u>

$$\begin{cases} u' = u \cdot \sin t \\ u(\underset{t_0}{7}) = \underset{\text{VALORE prescritto}}{21} \end{cases} \leftarrow \text{CONDIZIONE INIZIALE}$$



$$\begin{cases} u' = u \\ u(7) = 21 \end{cases}$$

Dall' analisi precedente le soluzioni dell' equaz. sono del tipo

$$u(t) = ce^t.$$

Cerco c in modo che $u(7) = 21$

$$u(7) = ce^7 = 21 \implies c = \frac{21}{e^7}$$

→ La soluzione del pb. di Cauchy è $u(t) = \frac{21}{e^7} \cdot e^t$

— o —

$u'' = u \cdot \sin t$ Quali condizioni iniziali posso mettere?

$$\left.\begin{aligned} u(7) &= 21 \\ u'(7) &= 27 \end{aligned}\right] \text{OK} \quad t_0 = 7$$

$$\begin{aligned} u(7) &= 21 \\ u'(27) &= 21 \end{aligned}$$

NON VA BENE

$$\begin{aligned} u(7) &= 21 \\ u''(7) &= 21 \end{aligned}$$

← Non va bene: la condiz. deve essere su u e u' →

$$\begin{aligned} u(7) &= 21 \\ u(3) &= 12 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ}}$

Sia dato un pb. di Cauchy per un' eq. diff. in FORMA NORMALE

$$u^{(n)} = F\left(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}\right)$$

Allora

$\boxed{\text{ESISTENZA}}$ Se F è continua esiste almeno una SOLUZIONE

$\boxed{\text{UNICITÀ}}$ Se F è decente (diciamo con deriv. parz. continue), allora la soluzione è UNICA.

Brutalmente: l' eq. diff. da sola ha infinite soluz. dipendenti da n parametri.
Imponendo le n condiz. iniziali si ottengono n equazioni che permettono di determinare i parametri.

Esempio "brutto"

$$\begin{cases} u' = 3u^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad = 3\sqrt[3]{u^2}$$

Una soluzione è $u(t) \equiv 0$

" " è $u(t) = t^3$

Due soluzioni con stessa condiz. iniziale
$\Rightarrow$ NON UNICITÀ

$$u'(t) = 3t^2 = 3\left(t^3\right)^{2/3} = 3u^{2/3}$$

[$u^{2/3}$ non è derivabile in $u=0$]

In realtà il problema di Cauchy in questo caso ha infinite soluzioni.