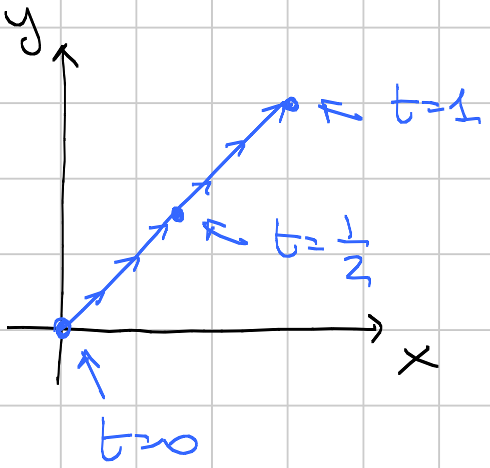
CURVE, LUNGHEZZA, INTEGRALI CURVILINEI

<u>Def.</u> Una CURVA è una funzione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ curva piana

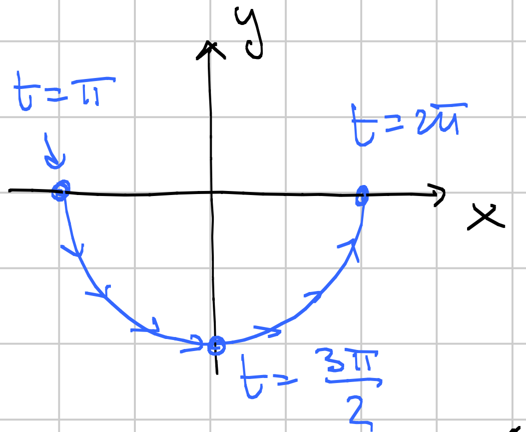
$\to \mathbb{R}^3$ curva nello spazio

Brutalmente: una curva è la parametrizzazione di un cammino

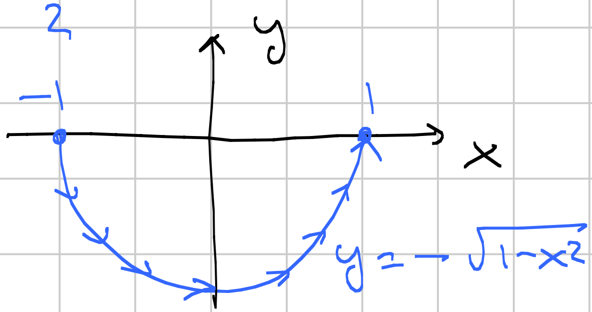
<u>Esempio 1</u> $[a,b] = [0,1]$ $\qquad \gamma(t) = \underbrace{(t,t)}_{\text{elemento di } \mathbb{R}^2}$



Esempio 2 $[a,b] = [\pi, 2\pi]$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$



Esempio 3 $[a,b] = [-1, 1]$

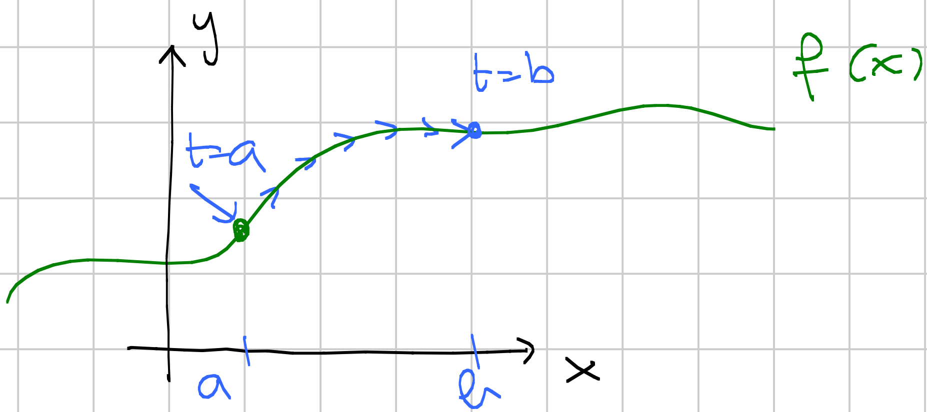


$$\gamma(t) = (t, \underbrace{-\sqrt{1-t^2}}_{f(t)})$$

Più in generale se ho una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, posso considerare la curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

Percorre il tratto di grafico corrispondente all' interv. $[a,b]$

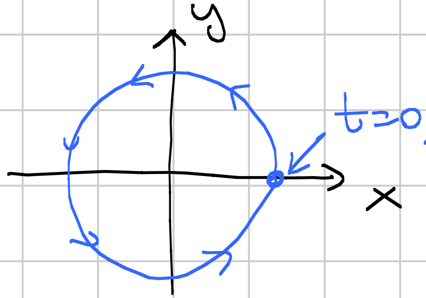


<u>Oss.</u> Una curva non è il disegno che percorre, ma il modo di percorrerlo.

Negli esempi 2 e 3 il disegno è lo stesso (SOSTEGNO della curva), ma viene percorso in 2 modi diversi.

— o — o —

<u>Esempio 4</u> $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$



<u>Esempio 5</u> $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 4\pi]$

Stessa circonferenza, ma gira 2 volte

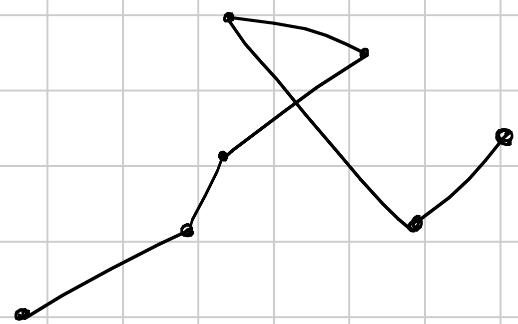
LUNGHEZZA DI UNA CURVA

= quello che segna il contakilometri

Come si definisce. Caso banale: segmento tra 2 p.ti

lunghezza = distanza tra i 2 p.ti

Caso semibanale: spezzata



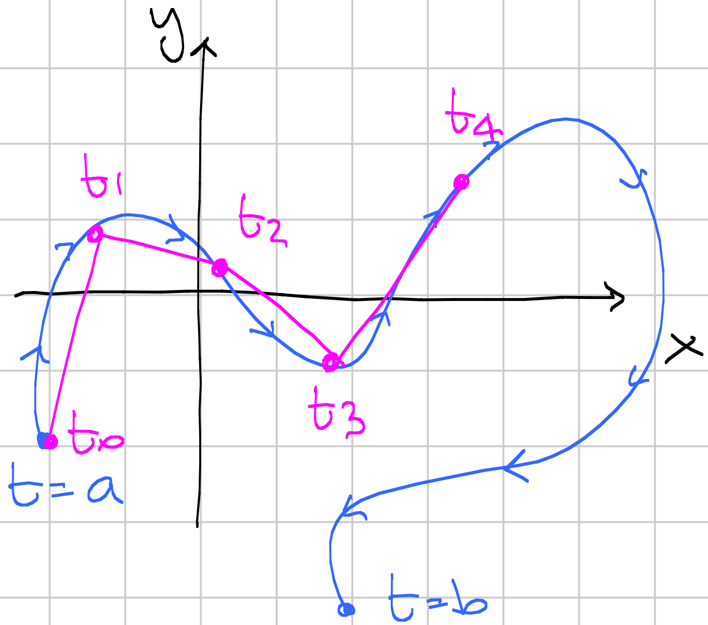
lunghezza = somma lunghezze dei segmenti

Caso generale: $\gamma(t)$ qualsiasi

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$x(t)$ e $y(t)$ sono le 2 componenti della curva

$t \in [a,b]$



Scelgo un po' di tempi
$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3$
e "fotografo" la posizione
a questi istanti.
Approssimo quella che
vorrei essere la lunghezza della curva con la spezzata che
passa per i p.ti campionati

Per definizione

LUNGHEZZA CURVA = SUP delle lunghezze delle
spezzate così ottenute.

Teorema Se 2 curve percorrono lo stesso disegno percorrendo ogni tratto una ed una sola volta, allora hanno la stessa lunghezza.

Come si calcola? Se abbiamo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in [a,b]$ e le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ decenti (ad es. deriv. con deriv. continua), allora

$$\boxed{\text{lungh.}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}\, dt} \qquad \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

Esempio 1 $\gamma(t) = (\underbrace{\cos t}_{x(t)}, \underbrace{\sin t}_{y(t)})$ $\qquad t \in [0, 2\pi]$

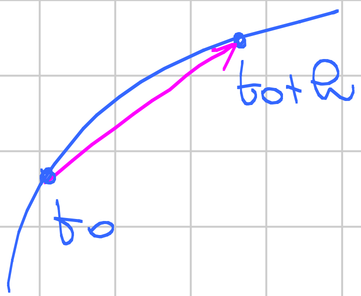
$\dot{x}(t) = -\sin t$

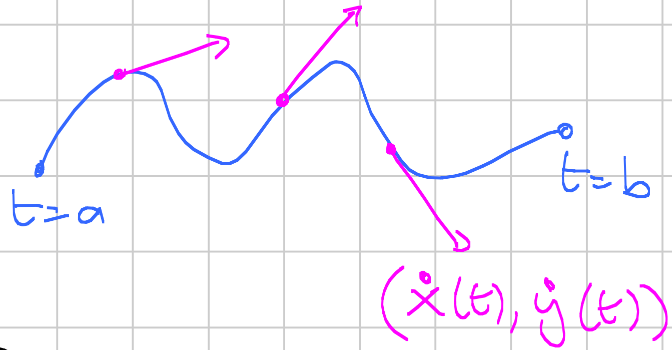
$\dot{y}(t) = \cos t$

$$\text{lungh}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt$$

$$= 2\pi$$

Che cos'è $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$? È un vettore che rappresenta la velocità





Facendo tendere h a zero il vettore "secante" tende al vettore velocità

Ammesso che $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ sia il vettore velocità,

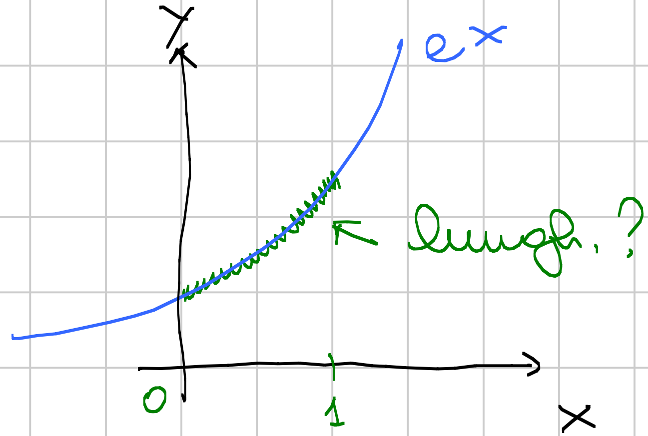
$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ rappresenta la sua norma.

VELOCITY : vettore $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$

SPEED : numero (norma della velocity)

Formula scritta: lunghezza = integrale della SPEED rispetto al tempo.

Nell'esempio prec. $(\cos t, \sin t)$ percorre la circ. con velocità costante,



Esempio 2

Scrivo la parametrizz.

$$\gamma(t) = (t, e^t) \qquad t \in [0,1]$$

$x(t)$ $\quad$ $y(t)$

$$\dot{x}(t) = 1 \qquad \dot{y}(t) = e^t$$

$$\text{lungh}(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2t}}\, dt =$$

Pongo $y = e^{2t}$ $\qquad dy = 2e^{2t}\,dt$ $\qquad$ Quando $t=0$, $y=1$

Quando $t=1$, $y=e^2$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+e^{2t}} \cdot \frac{\boxed{2e^{2t}\,dt}^{\,dy}}{2e^{2t}} = \int_1^{e^2} \sqrt{1+y}\,\frac{dy}{2y} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{\sqrt{1+y}}{y}\,dy$$

Pongo $\sqrt{1+y} = z$

$1+y = z^2 \qquad y = z^2-1$

$dy = 2z\,dz$

Quando $y=1$, $z=\sqrt{2}$

" $y=e^2$, $z=\sqrt{e^2+1}$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{z}{z^2-1}\,\cancel{2}z\,dz$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{z^2-1+1}{z^2-1}\,dz = \int_{\cdots}^{\cdots}\left(1+\frac{1}{z^2-1}\right)dz$$

$= $ viene ...