MATEMATICA I

ORA 77

Titolo nota 29/11/2007

Integrali impropri: criteri di convergenza

Servono a stabilire se un integrale improprio converge o no senza usare la definizione (primitiva + limite).
Se l'integrale converge, NON permettono di calcolarne il valore esatto.

<u>Integranda $f(x)$ a segno costante</u> (≥ 0): i comportamenti possibili sono solo 2:
- convergere
- divergere a $+\infty$

CRITERI → CONFRONTO
CRITERI → CONFRONTO ASINTOTICO → CASI STANDARD
CONFRONTO ASINTOTICO → CASI LIMITE

Integranda $f(x)$ a segno variabile : CRITERIO ASSOLUTA INTEGRABILITÀ

Criterio assoluta integrabilità (E è la zona di integrazione: intervallo o semiretta)

$$\int_E |f(x)|\,dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x)\,dx \text{ converge}$$

(In generale non vale il viceversa)

$$\int_E |f(x)|\,dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

— o — o —

$\boxed{\text{CRITERIO CONFRONTO}}$ $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E$

$$\int_E f(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x)\,dx = +\infty$$

$$\int_E g(x)\,dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x)\,dx < +\infty$$

$\boxed{\text{CONFRONTO ASINTOTICO}}$ $f(x) \geq 0$ $g(x) > 0$ in E

$$\lim_{x \to} \frac{f(x)}{g(x)} = l \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}, \text{ allora}$$

PROBLEMA (se la zona di int. è $[a, +\infty)$ il problema è $+\infty$, se la zona è $[a,b]$, il problema è l'estremo in cui la funzione non è limitata)

$\int_E f(x)\,dx$ si comporta come $\int_E g(x)\,dx$

CON QUEL TIPO DI PROBLEMA

<u>Esempio 1</u>

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^3 \frac{1}{x^2}\,dx}_{\text{DIVERGE A } +\infty} + \underbrace{\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{\text{CONVERGE}} = +\infty$$

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{x^5+5}{x^7+7}}_{f(x)}\,dx$

$f(x)$ è limitata perchè il denominatore non si annulla nella zona di integrazione

→ UNICO PROBLEMA: $+\infty$

Brutale $\dfrac{x^5+5}{x^7+7} \sim \dfrac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to \boxed{+\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+5}{x^7+7}\cdot x^2 = 1 \quad \begin{matrix}\neq 0\\ \neq +\infty\end{matrix}$$

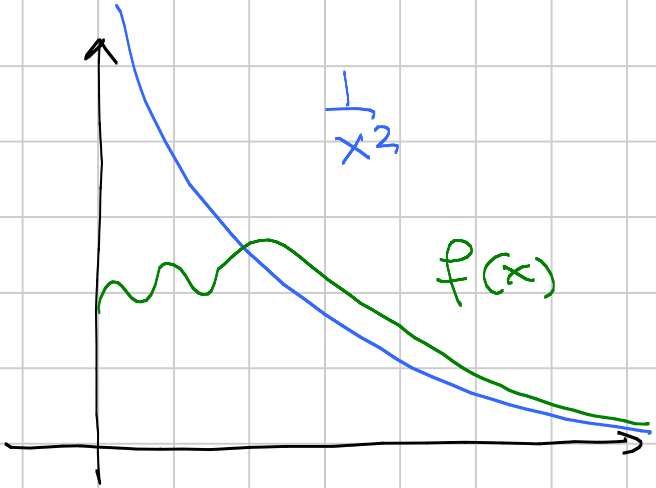
PROBLEMA

Quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ si comporta come $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$, dunque diverge a $+\infty$

NO!!!!!!!!!!

Quindi l'integrale di $f(x)$ con unico problema $+\infty$ si comporta come l'integrale di $\frac{1}{x^2}$ con problema a $+\infty$, dunque CONVERGE

Il confronto tra $f(x)$ e $g(x)$ vale solo per x grandi



Esempio 2

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx$$

2 problemi: $x=0$ e $x=+\infty$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx}_{\text{CONV.}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx}_{\text{CONV.}}$$

Integranda ≥ 0

$\Rightarrow$ CONVERGE

$$\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{100}{x^{3/2}}$$

$\int \frac{100}{x^{3/2}}\,dx$ con problema a $+\infty$ CONVERGE $(\alpha = 3/2 > 1)$

quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\,dx \quad \text{converge}$$

Esaminiamo l'integrale in $[0,1]$

Per $x \sim 0$ si ha $\frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} \sim \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

di conseguenza l'integrale di $f(x)$ con problema in $x=0$ si comporta come

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ con pb. in $x=0$, dunque CONVERGE

Esempio 3 $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ Unico problema: $x = +\infty$

Integranda a segno variabile $\Rightarrow$ unica speranza (per ora) è l'assoluta integrabilità. Quindi studio

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx \qquad \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx$ con pb. a $+\infty$ CONVERGE $(\alpha > 2)$

$\Downarrow$ (CRITERIO CONFRONTO)

$\displaystyle\int \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx$ con pb. a $+\infty$ CONVERGE

$\Downarrow$ (ASSOLUTA INTEGRABILITÀ)

$\displaystyle\int \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ con pb. a $+\infty$ CONVERGE

Esempio 4 $\displaystyle\int_0^{10} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ Unico pb. a $x=0$

L'integranda è ≥ 0 vicino al problema, quindi posso usare i criteri

Vicino a $x=0$

$$\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Rigorosamente faccio confr. asint. con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Quindi $\int \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ con problema a $x=0$ si comporta come $\int \frac{1}{x}\,dx$ con problema a $x=0$, dunque DIVERGE

Esempio 5 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ problema in $x=1$

CAMBIO VARIABILI $y = x-1$ $dy = dx$

Quando $x=1$, ho che $y=0$; quando $x=2$, ho che $y=1$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dy}{y}$$, dunque DIVERGE

Esempio 6 $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x^4-1}\,dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx$$

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx$ converge per confr. asint. con $\dfrac{1}{x^4}$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}$$

COLPEVOLE DELL'INT. IMPROPRIO

Individuato il problema si fa confr. asint. con $\frac{1}{x-1} = g(x)$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^4-1} \cdot (x-1)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{4} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Quindi $\int_1^2 \frac{dx}{x^4-1}$ si comporta come $\int \frac{dx}{x-1}$ con pb. in $x=1$,

il quale a sua volta si comporta come $\int \frac{dy}{y}$ con pb. in $y=0$,
dunque diverge.

<u>Esempio 7</u>

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$$

CONVERGE   CONVERGE $\sim \frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}} \text{ a } x=1 \sim \frac{1}{\sqrt{y}} \text{ a } y=0$$