MATEMATICA I

$\boxed{\text{ORA 76}}$

Titolo nota 29/11/2007

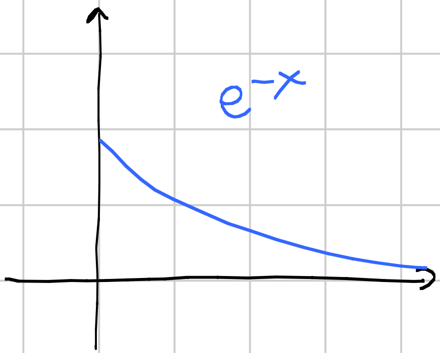
INTEGRALI IMPROPRI (in una variabile)

Integrale proprio: → zona di integrazione limitata
↘ integranda $f(x)$ limitata

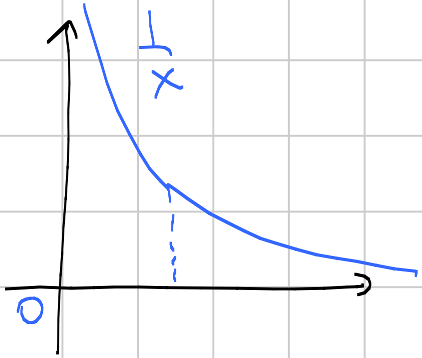
Integrale improprio: se manca uno/o entrambe gli ingredienti
(zona di int. non limitata e/o $f(x)$ non limitata)

Esempi

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \qquad \int_0^{3} \frac{1}{x^3}\,dx$$



funzione limitata
zona integr. non lim,



zona int. non lim.
funz. non lim.

zona int. limit.
funz. non lim.

INTEGRALI IMPROPRI $\boxed{\text{MONOPROBLEMA}}$

↗ zona di integrazione: intervallo $[a,b]$ (dunque limitato)
$f(x)$ non limitata vicino a $x=a$ oppure $x=b$

↘ $f(x)$ limitata, zona di integrazione = semiretta ($[a,+\infty)$
oppure $(-\infty, b]$)

Dato un integrale improprio, occorre spezzarlo nella somma di tanti integrali MONOPROBLEMA

Esempi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \int_0^{7} \frac{1}{x}\,dx + \int_7^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

unico probl. $f(x)$ non limitata vicino ad $x=0$

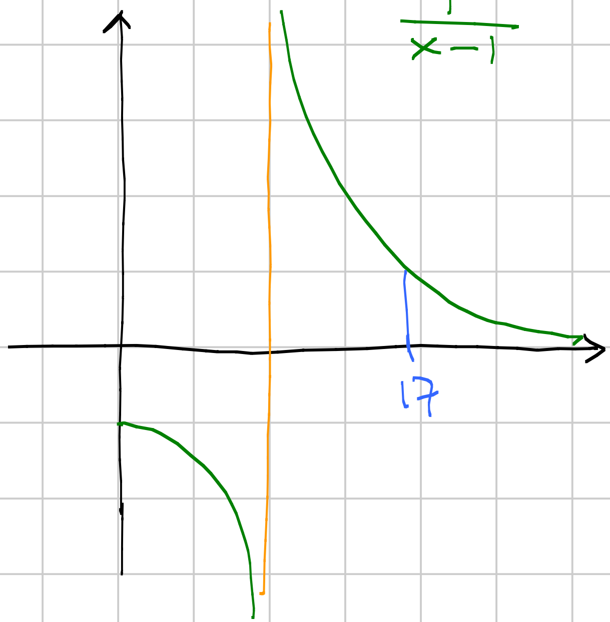
unico problema zona di int.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \int_0^{\boxed{1}} \frac{1}{x-1}\,dx + \int_{\boxed{1}}^{17} \frac{1}{x-1}\,dx + \int_{17}^{+\infty} \frac{1}{x-1}\,dx$$

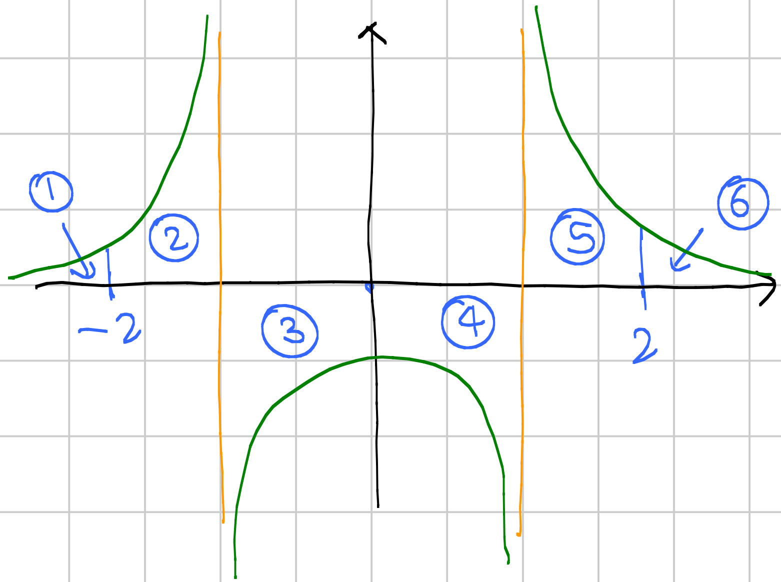
$f(x)$ non lim. vicino $x=1$

zona int. non limit.



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^8-1}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} + \int_{1}^{2} + \int_{2}^{+\infty}$$

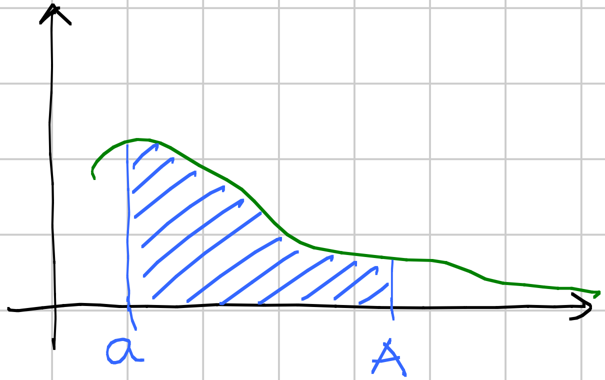


— o — o —

TRATTAMENTO INTEGRALI MONOPROBLEMA

$\boxed{1^o \text{ CASO}}$ $f(x)$ limitata, zona di integrazione : $[a, +\infty)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \underbrace{\int_a^A f(x)\,dx}_{\text{integrale proprio}}$$



Essendo un limite, ci sono i soliti 4 possibili comportamenti

Esempio 1

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \Big[-e^{-x}\Big]_{x=0}^{x=A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \Big[-\underbrace{\boxed{e^{-A}}}_{\downarrow\, 0}+1\Big] = 1$$

L'int. improprio CONVERGE a 1.

Esempio 2

$$\int_7^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_7^A \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \Big[\log x\Big]_{x=7}^{x=A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \Big[\log A - \log 7\Big] = +\infty$$

L'int. improprio DIVERGE a $+\infty$ (stessa cosa se sostituisco 7 con un qualunque $a>0$)

Esempio 3

$$\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_7^{A} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \qquad \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$$

$\boxed{\alpha \neq 1}$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} \, \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{x=7}^{x=A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{-\alpha+1} \, \frac{1}{A^{\alpha-1}} + \underbrace{\frac{1}{\alpha-1} \, \frac{1}{7^{\alpha-1}}}_{\text{Numero}} \right)$$

$$= \text{Numero} + \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^{\alpha-1}} = \begin{cases} \text{se } \alpha>1 \to \text{Numero} \\ \text{se } \alpha<1 \to +\infty \end{cases}$$

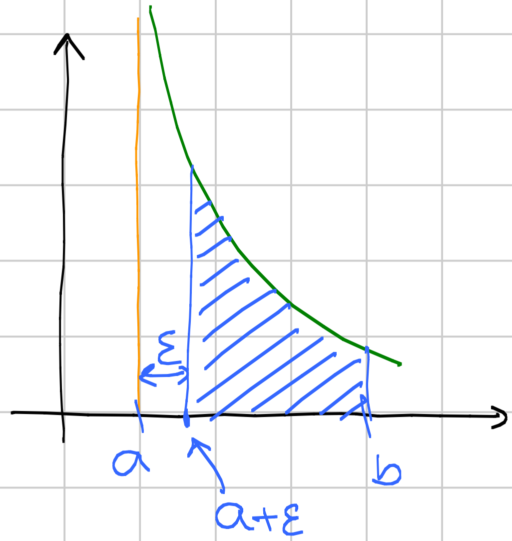
Conclusione

$$\boxed{\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \text{converge se } \alpha>1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}}$$

Posso sostituire 7 con ogni $a>0$

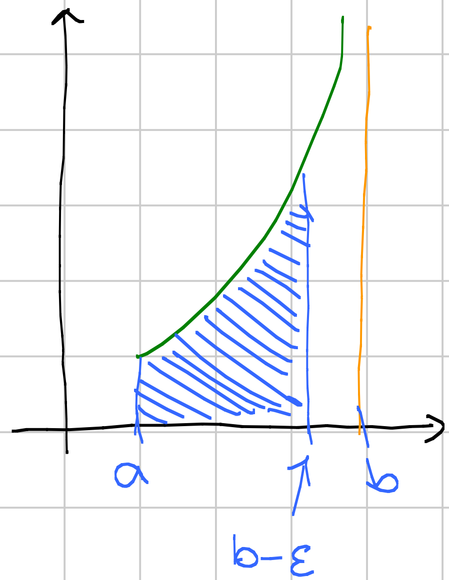
$\boxed{2° \text{ caso}}$ zona di integr. = intervallo $[a,b]$
$f(x)$ non limitata vicino ad $x = a$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$



Se il problema fosse in $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$



Esempio 1

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big[2\sqrt{x} \Big]_{x=\varepsilon}^{x=2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{\varepsilon} \right) = 2\sqrt{2} \to \text{CONVERGE}$$

Esempio 2

$$\int_0^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big[\log x \Big]_{x=\varepsilon}^{x=2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\log 2 - \log \varepsilon \right) = +\infty \to \text{DIVERGE}$$

Esempio 3

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^2 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} \, \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{x=\varepsilon}^{x=2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right)$$

$=$ ↗ se $\alpha < 1$ tende a $\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{2^{\alpha-1}}$

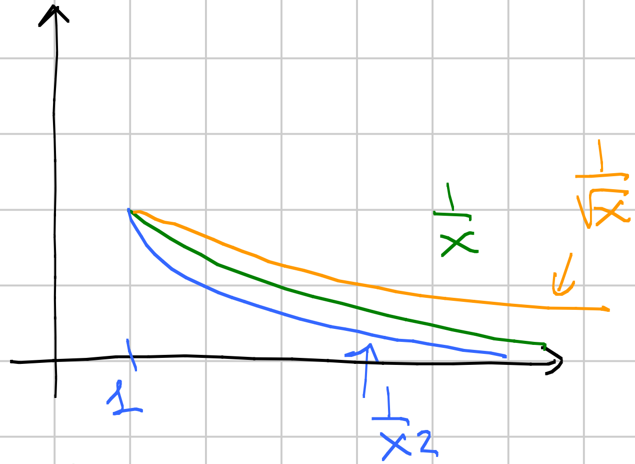
↘ se $\alpha > 1$ "ε è al denominatore" quindi tende a $+\infty$ (occhio ai segni!)

Conclusione

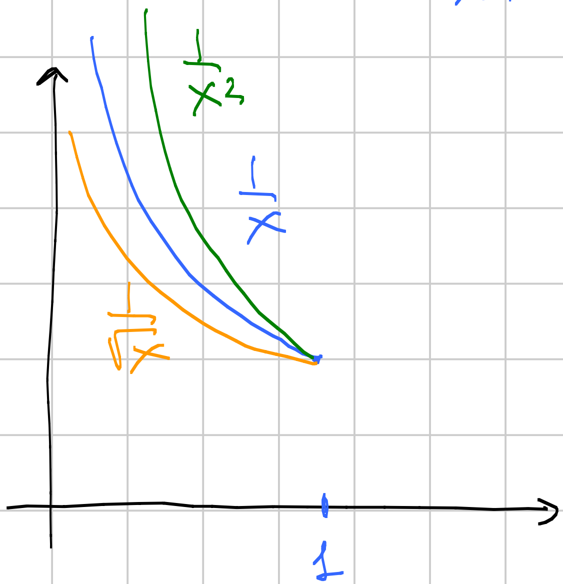
$$\boxed{\int_0^2 \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \nearrow \text{ Converge se } \alpha < 1 \\ \searrow \text{ Diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases}}$$

Il 2 non è importante

<u>Oss.</u> Per $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$



"Più α è grande, più la funzione è piccola, più è facile che l'integrale improprio converga"



Per $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ la situazione è opposta

"Più α è piccolo, più facile è la convergenza"

— o —

Se l'integrale ha tanti problemi,

① si scompone in tanti pezzi con un problema solo

② si studiano i vari pezzi

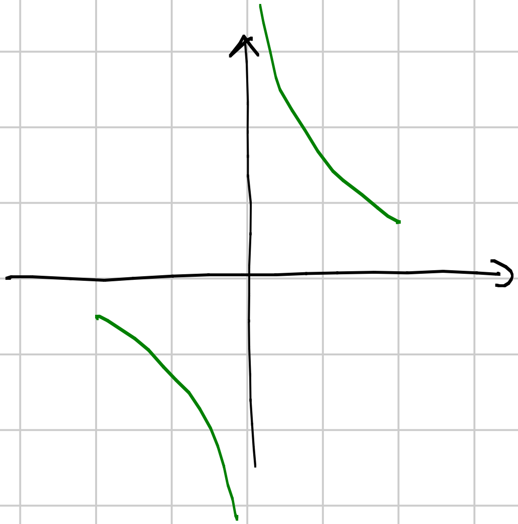
③ si conclude (se c'è un pezzo che div. a $+\infty$ e un pezzo che diverge a $-\infty$, quello complessivo si dichiara indeterminato).

Esempio

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_{x=-1}^{x=1} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0}$$

NO!!!!!! L'integrale è IMPROPRIO !!

$$= \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx}_{\substack{\downarrow \\ \text{DIVERGE} \\ \text{A } -\infty}} + \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx}_{\substack{\downarrow \\ \text{DIVERGE A } +\infty \\ (\alpha = 3)}}$$



$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx \quad \text{è indeterminato}$$