# SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2)$$

$$\int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \text{bisogna fare i conti}$$

$$\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\log(x^4+1)$$

$$x^4+1+2x^2-2x^2 = (x^2+1) - (\sqrt{2}x)^2$$

$$= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

$\boxed{1^\circ \text{ caso: } \quad Rat(e^x)}$ = funzione razionale di $e^x$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} =$$

Pongo $y = e^x$ (in alternativa: $y = e^x+1$)

$$\frac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$$

$$= \int \frac{e^x dx}{e^x(e^x+1)} = \int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy =$$

$$= \log|y| - \log|y+1|$$

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$$

$$= \log e^x - \log(e^x+1)$$

$$= x - \log(e^x+1)$$

Altro modo di vedere la sostituzione

$$y = e^x \; ; \quad x = \log y \; ; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \; ; \quad dx = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{\boxed{dx}}{e^x+1} = \int \frac{dy}{y} \frac{1}{y+1}$$

Esempio 2 $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+2}\,dx$

Pongo $e^x = y$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = e^x$

$dy = e^x dx$

$$= \int \frac{e^{2x}\cdot \boxed{e^x dx}^{\,dy}}{e^{2x}+2} = \int \frac{y^2\,dy}{y^2+2} = \int \frac{y^2+2-2}{y^2+2}\,dy =$$

$$= \int \left(1 - \frac{2}{y^2+2}\right) dy = y - 2\int \frac{dy}{y^2+2} = y - 2\,\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$= e^x - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right)$$

— o —

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \arctan(e^x)$$

per esercizio fare la sostituzione!

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\log(e^{2x}+1) = \log\sqrt{e^{2x}+1}$$

per es. la sostituzione $y = e^x$ / $y = e^{2x}$

Esempio $\displaystyle\int \frac{1}{3^x-2}\,dx =$ $\quad y = 3^x \quad \frac{dy}{dx} = 3^x \log 3$

$dy = 3^x \cdot \log 3 \cdot dx$

$$= \int \frac{\overset{dy}{\boxed{3^x \cdot \log 3 \cdot dx}}}{3^x \cdot \log 3} \, \frac{1}{3^x - 2} = \frac{1}{\log 3} \int \frac{dy}{y(y-2)} =$$ solita funzione razionale

—o—o—

$\boxed{2° \text{ caso}}$: radici di roba di 1° grado

$\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x}+1}\,dx$ $\quad y = \sqrt{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$= \int \frac{x+3}{\sqrt{x}+1} \, \frac{2\sqrt{x}}{\boxed{2\sqrt{x}}} \boxed{dx} = \int \frac{y^2+3}{y+1} \cdot 2y\, dy = 2 \int \frac{y^3+3y}{y+1}\, dy$$

$$= 2 \int \frac{\boxed{y^3+y^2} \boxed{-y^2-y} + y + \boxed{3y-3+3}}{y+1}\, dy = 2 \int \left( y^2 - y + 3 + \frac{\overset{y+1-4}{y-3}}{y+1} \right) dy$$

$$= 2\int \left(y^2 - y + 3 + 1 - \frac{4}{y+1}\right) dy = 2\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 4y - 4\log|y+1|\right]$$

$$= \frac{2}{3}y^3 - y^2 + 8y - 8\log|y+1| = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 8\sqrt{x} - 8\log(\sqrt{x}+1)$$

1° commento: si poteva fare la divisione

$$\begin{array}{rrrr|l}
y^3 & & +3y & & y+1 \\ \cline{5-5}
-y^3 & -y^2 & & & \boxed{y^2 - y + 4} \\ \cline{1-4}
// & -y^2 & +3y & & \\
 & +y^2 & +y & & \\ \cline{2-4}
 & // & 4y & & \\
 & & -4y & -4 & \\ \cline{3-4}
 & & // & \boxed{-4} &
\end{array}$$

$\boxed{\text{2° commento}}$ $\int \frac{x+3}{\sqrt{x}+1}\,dx$

$y=\sqrt{x} \rightarrow x=y^2 \rightarrow \frac{dx}{dy}=2y$

$\rightarrow dx = 2y\,dy$

$= \int \frac{y^2+3}{y+1}\,\underbrace{\boxed{2y\,dy}}_{dx}$

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}+2}\,dx$

Pongo $y=\sqrt[3]{x} \rightarrow x=y^3$

$\rightarrow \frac{dx}{dy}=3y^2 \rightarrow dx = 3y^2\,dy$

$= \int \frac{y+1}{y+2}\,3y^2\,dy$ = funzione razionale...

minimo comune multiplo di 2 e 3

<u>Esempio 3</u> $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+2}\,dx$

Pongo $y=\sqrt[\boxed{6}]{x}$

$\sqrt{x}=y^3 \qquad \sqrt[3]{x}=y^2$

$x=y^6 \; ; \; \frac{dx}{dy}=6y^5 \; ; \; dx = 6y^5\,dy$

$$= \int \frac{y^3+1}{y^2+2} \cdot 6y^5\, dy = \text{funzione razionale} \ldots$$

Esempio 4 $\quad \int \sqrt{\frac{x+1}{x+4}}\, dx$

$y = \sqrt{\frac{x+1}{x+4}}$ ; $y^2 = \frac{x+1}{x+4}$

$$= \int \overset{G}{y} \underbrace{\overset{f}{\left(\frac{1-4y^2}{y^2-1}\right)'} dy}_{dx} =$$

$y^2(x+4) = x+1$

$x(y^2-1) = 1-4y^2$

$x = \frac{1-4y^2}{y^2-1}$

Derivato

$dx = \left(\frac{1-4y^2}{y^2-1}\right)^{\boxed{\prime}} dy$

$$= \overset{G}{y}\, \overset{F}{\frac{1-4y^2}{y^2-1}} - \int \overset{g}{1} \cdot \overset{F}{\frac{1-4y^2}{y^2-1}}\, dy$$

$$= y\,\frac{1-4y^2}{y^2-1} + \int \frac{\overset{4y^2-4+3}{4y^2-1}}{y^2-1}\, dy = y\,\frac{1-4y^2}{y^2-1} + \int \left(4 + \frac{3}{y^2-1}\right) dy$$

$$= y\,\frac{1-4y^2}{y^2-1} + 4y + 3\int \frac{dy}{y^2-1} = \mathrm{Int}$$

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right]$$

Moltiplico per $(y+1)$ $\rightarrow$ $\dfrac{1}{y-1} = A + B\,\dfrac{y+1}{y-1}$

Pongo $y=-1$ $\rightarrow$ $-\dfrac{1}{2} = A$

Moltiplico per $(y-1)$ $\rightarrow$ $\dfrac{1}{y+1} = A\,\dfrac{y-1}{y+1} + B$

Pongo $y=1$ $\rightarrow$ $B = \dfrac{1}{2}$

$$\mathrm{Int} = y\,\frac{1-4y^2}{y^2-1} + 4y + \frac{3}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| =$$ sostituire y...

Queste tecniche funzionano con integrali che contengono espressioni del tipo $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

Se ci sono radici con indici diversi (l'argomento deve essere lo stesso) si sceglie una radice che ha come indice il min. com. multiplo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}\,dx \rightarrow \text{NULLA DA FARE !!!}$$