MATEMATICA I

$\boxed{\text{ORA 67}}$

TECNICHE DI INTEGRAZIONE

Come calcolare le PRIMITIVE.

$\int_a^b f(x)\,dx$ Cerco una F t.c. $F' = f$ (una qualunque)

$$= \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Quanto fa $\int_a^b f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_a^b = f(b) - f(a)$

La primitiva di $f'(x)$ è $f(x)$.

La scrivo nella forma

$$\int_a^b \varphi'(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Applico questa formula con $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\varphi'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x)\, g'(x).$$ Quindi

$$\int_a^b \left[f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\right] = \Big[\varphi(x)\Big]_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \Big[f(x)\, g(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$$

$$\boxed{\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = \Big[f(x) \cdot g(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx}$$

FORMULA INTEGRAZIONE PER PARTI "UFFICIALE"

(integrali con estremi)

ABUSIVA:

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx$$

Altro modo di scrivere la formula

$$\int f G = F G - \int F g \qquad \text{dove si intende } F' = f,\ G' = g$$

Esempio 1

$$\int x \cos x \, dx = (\sin x)\, x - \int 1 \cdot \sin x \, dx$$

NON UTILE ~~f G~~

$$\underset{G}{x}\ \underset{f}{\cos x}\qquad \underset{F}{(\sin x)}\ \underset{G}{x}\qquad \underset{g}{1}\cdot \underset{F}{\sin x}$$

$$= x \sin x + \cos x$$

Controllare sempre che la primitiva sia quello che deve essere facendo la derivata:

$$(x \sin x + \cos x)' = \cancel{\sin x} + x \cdot \cos x - \cancel{\sin x}$$

$$= x \cos x \qquad \text{OK.}$$

Esempio 2

$$\int \underset{G}{x^2} \underset{f}{e^x}\, dx = \underset{G}{x^2} \cdot \underset{F}{e^x} - \int \underset{g}{2x} \cdot \underset{F}{e^x}\, dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2\int x e^x\, dx$$

ora devo calcolare $\int \underset{G}{x} \underset{f}{e^x}\, dx = \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{e^x} - \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{e^x}\, dx$

$$= x \cdot e^x - e^x$$

In conclusione: $\int x^2 e^x\, dx = x^2 \cdot e^x - 2x e^x + 2e^x$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x$$

Quali integrali si fanno con la stessa tecnica? $p(x)$ polinomio

$$\int p(x) \cdot e^x\, dx \qquad \int p(x) \cos x\, dx \qquad \int p(x) \sin x\, dx$$

Esempio 3

$$\int \log x \, dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\log x} \, dx = \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\log x} - \int \underset{F}{\cancel{x}} \cdot \underset{g}{\frac{1}{\cancel{x}}} \, dx$$

$$= x \cdot \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x$$

Esempio 4

$$\int x^2 \log(x^{20}) \, dx = 20 \int x^2 \log x \, dx$$

$$\int \underset{f}{x^2} \underset{G}{\log x} \, dx = \underset{F}{\frac{x^3}{3}} \cdot \underset{G}{\log x} - \int \underset{F}{\frac{x^3}{3}} \cdot \underset{g}{\frac{1}{x}} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3$$

Moltiplicare per 20 per l'esercizio iniziale

Esempio 5

$$\int \arctan x \, dx =$$

$$= \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\arctan x} \, dx = \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\arctan x} - \int \underset{F}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx$$

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

N.B. $\left[\log(1+x^2)\right]' = \frac{2x}{1+x^3}$

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

$$= x \cdot \arctan x - \log\sqrt{1+x^2}$$

— o —

Esempio 6 GRANDE RITORNO

$$\int \underset{G}{e^x} \, \underset{f}{\cos x} \, dx = \underset{G}{e^x} \, \underset{F}{\sin x} - \int \underset{g}{e^x} \, \underset{F}{\sin x} \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x(-\cos x) - \int e^x (-\cos x)\, dx$$

g F → NO BUONO

G f   G F   g F

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

Tornando all' inizio abbiamo che

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{\text{SOSTITUISCO}}$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}$$

è tornato l' integrale iniziale, ma con segno diverso

Portando l'integrale a sinistra ho che

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

— o — o —

Esempio 7

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \underset{G}{\cos x} \cdot \underset{f}{\cos x} \, dx = \underset{G}{\cos x} \cdot \underset{F}{\sin x} - \int \underset{g}{(-\sin x)} \cdot \underset{F}{\sin x} \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx$$

Grande ritorno

$$2\int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + x \implies \boxed{\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x + \frac{x}{2}}$$

Allo stesso modo si fa $\int \sin^2 x \, dx$

Esempio 8

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{G}{\sin^2 x} \, dx = \underset{F}{(-\cos x)} \cdot \underset{G}{\sin^2 x} - \int \underset{F}{(-\cos x)} \cdot \underset{g}{2 \sin x \cos x} \, dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$= -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \int \sin x - 2 \int \sin^3 x \, dx$$

Grande ritorno

$$\Rightarrow 3 \int \sin^3 x \, dx = -\cos x \cdot \sin^2 x + 2 \int \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^3 x \, dx = \frac{1}{3} \left[-\cos x \cdot \sin^2 x - 2 \cos x \right]$$

Esempio 9

$$\int \tan x \, dx = \int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{\cos x}} \, dx$$

$$= \underset{F}{(-\cos x)} \cdot \underset{G}{\frac{1}{\cos x}} - \int \underset{F}{(-\cos x)} \cdot \underset{g}{\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)} (-\sin x) \, dx$$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{\int \tan x \, dx} = -1 + \cancel{\int \tan x \, dx}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 = -1}$$

La formula di int. per parti è ABUSIVA!!!