MATEMATICA I

ORA 66

Titolo nota — 21/11/2007

- FUNZIONE INTEGRALE
- PRIMITIVE
- TEO. MEDIA INTEGRALE
- TEO. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

PRIMITIVE ↑ ANTIDERIVATIVE

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si dice PRIMITIVA di $f(x)$ è una qualunque funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile tale che

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

FUNZIONE INTEGRALE

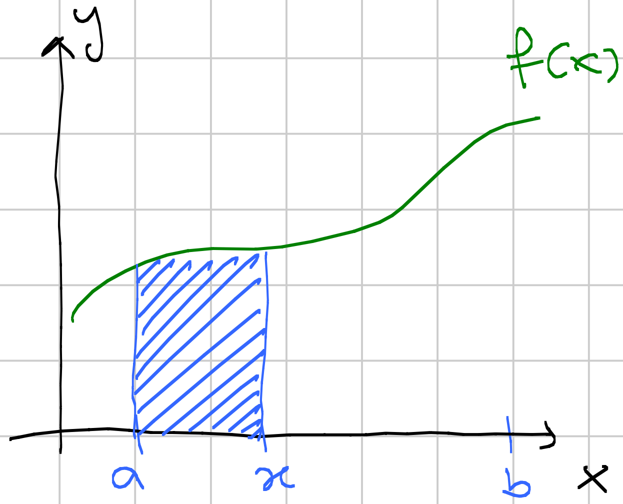
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione INTEGRABILE. Si dice funzione integrale la funzione

ESTREMO

$$I(x) = \int_a^{\boxed{x}} f(x)\,dx$$

VAR. DI INTEGR.

← Non va bene (doppio uso della x)



$$= \int_a^x f(t)\,dt$$

definita per $x \in [a,b]$. (Esempio $I(a)=0$)

—o—o—

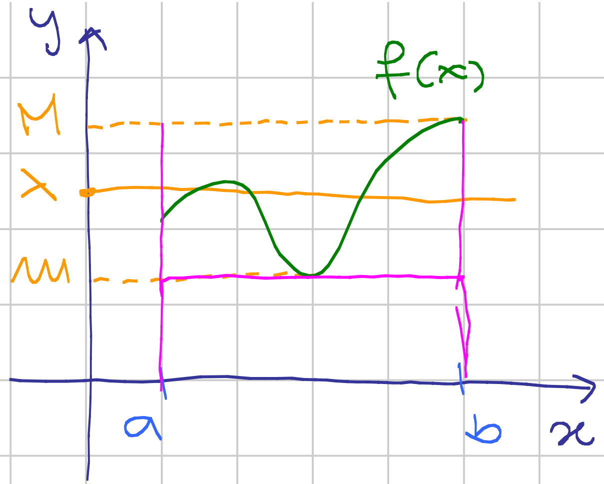
TEO. MEDIA INTEGRALE

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione $\boxed{\text{continua}}$, dunque integrabile.

Allora esiste un punto $\xi \in [a,b]$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Dim, W ⇒ nell'intervallo [a, b]
esistono massimo e minimo



Quindi $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

$\int_a^b f(x)\,dx \leq$ area del rettangolo di altezza M

$\geq$ area del rettangolo di altezza m

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \underbrace{M\,(b-a)}$$

Area rettangolo di altezza M

Dividendo per (b−a) (che è >0) ho

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \leq M$$

Questo numero è un valore λ compreso fra max e min della funzione

Essendo $f(x)$ continua, per il teo. di esistenza degli zeri e sue estensioni ci sarà un punto ξ in cui $f(\xi) = \lambda$. Ciascuno di questi punti ξ è quello cercato.

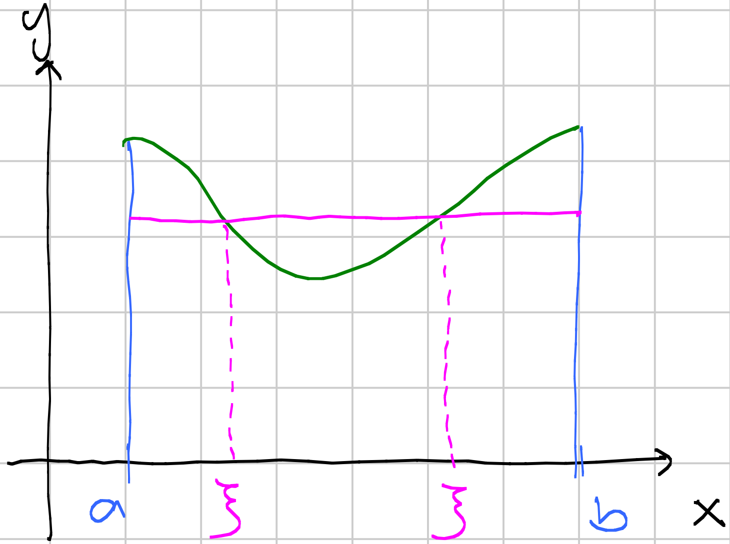
— o — o —

Interpretazione geometrica. Scriviamo la tesi nella forma

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{I} = \underbrace{(b-a)\, f(\xi)}$$

"Area sotto la funzione"

Area di un rettangolo che ha come base il segmento $[a,b]$ e come altezza $f(\xi)$



TEO. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

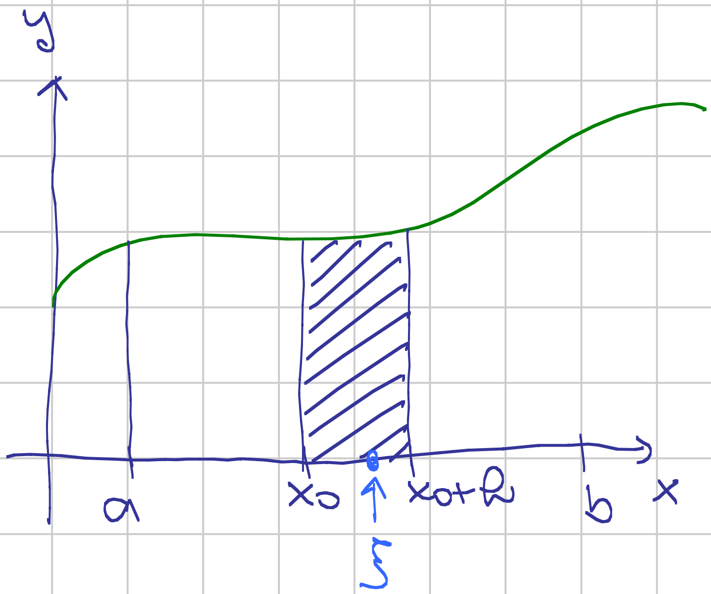
Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Sia $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ la funzione integrale.

Allora $I(x)$ è una primitiva, cioè $I'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

<u>Dim.</u> prendo un p.to $x_0 \in (a,b)$

$$I'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{I(x_0+h) - I(x_0)}{h} =$$



$I(x_0+h)$ = integrale tra a e x_0+h
$I(x_0)$ = " " " " x_0

Quindi $I(x_0+h) - I(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}_{\text{integrale su un intervallo di lunghezza } h} = \lim_{h\to 0} f(\xi)$$

TEO. MEDIA INTEGRALE SULL' INTERVALLO $[x_0, x_0+h]$

Il p.to ξ sta tra x_0 e x_0+h.
Quando $h\to 0$, $\xi \to x_0$ quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{I(x_0+h) - I(x_0)}{h} = \lim_{\xi\to x_0} f(\xi) = f(x_0)$$

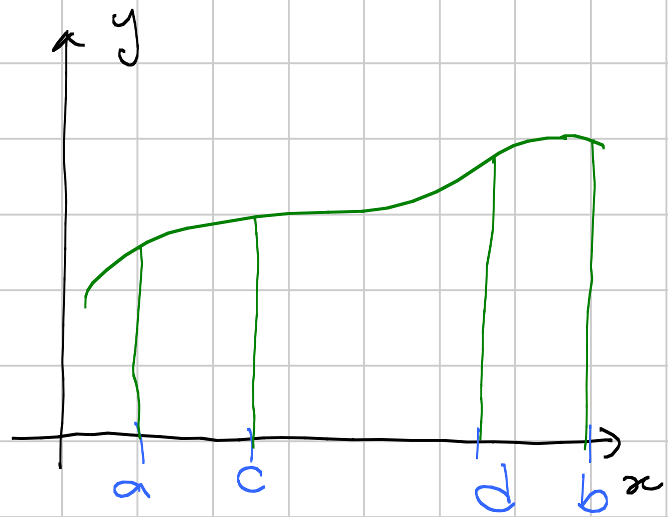
— o — o —

$$\boxed{\text{FUNZIONE INTEGRALE E CALCOLO DI INTEGRALI}}$$

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $I(x)$ la funzione integrale.
Allora per ogni intervallo $[c,d] \subseteq [a,b]$ si ha che

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$$

$$= I(d) - I(c)$$



Conclusione: se conosco la funzione integrale, so calcolare il valore degli integrali

Ma la funzione integrale è $\boxed{\text{una}}$ primitiva di $f(x)$, quindi la ottengo cercando una funzione $I(x)$ t.c. $I'(x) = f(x)$.

FATTO GENERALE: due primitive della stessa funzione $f(x)$, definite su un intervallo $[a,b]$, differiscono tra di loro per una costante.

Perché? Siano $F_1(x)$ e $F_2(x)$ due primitive, cioè

$$F_1'(x) = f(x) \qquad F_2'(x) = f(x), \quad \text{Allora}$$

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1' - F_2' = f(x) - f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ La derivata della differenza è 0, quindi la differenza è costante. (prima o poi commentiamo)

— o —

<u>Conclusione operativa</u> Voglio calcolare $\int_c^d f(x)\,dx$.

Dovrei fare $I(d) - I(c)$. Prendo invece una qualunque primitiva $F(x)$ e calcolo $F(d) - F(c)$. Il risultato è lo stesso!

Infatti: $F(x)$ e $I(x)$ sono 2 primitive, quindi $F(x) = I(x) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}{\alpha}$, ma allora

$$F(d) - F(c) = (I(d) + \cancel{\alpha}) - (I(c) + \cancel{\alpha}) = I(d) - I(c)$$

Quindi: calcolare gli integrali = calcolare le primitive.

Notazione: con $\int f(x)\,dx$ indichiamo una qualunque primitiva di $f(x)$

senza estremi

<u>Esempi</u>

$$\int e^x\,dx = e^x \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \qquad \int \cosh x\,dx = \sinh x$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$ ← PARLIAMONE

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} \qquad \int x^k\,dx = \underbrace{\frac{x^{k+1}}{k+1}}_{\text{Funziona } \forall k \in \mathbb{R},\ k \neq -1}$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

$$\int_0^8 \sqrt{x}\,dx =$$ devo prendere una primitiva e fare la differenza del valore negli estremi

$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^8 = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_{x=0}^{x=8}$$

$$= \frac{2}{3}8\sqrt{8} - \frac{2}{3}0\sqrt{0}$$

$$= \frac{16}{3}\sqrt{8}$$