MATEMATICA I

$\boxed{\text{ORA } 65}$

Titolo nota 21/11/2007

INTEGRALI IN UNA VARIABILE

1. NOTAZIONI
2. SIGNIFICATO GEOMETRICO
3. "DEFINIZIONE"
4. TECNICHE DI CALCOLO

1 NOTAZIONI

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$\int$ = simbolo di integrale
= deformazione della lettera S, che a sua volta sta per somma

a e b si chiamano estremi di integrazione
$f(x)$ si chiama INTEGRANDA
dx è un mistero

Si parla di INTEGRALI PROPRI quando

1) la zona di integrazione è un intervallo $[a,b]$, dunque un insieme limitato

2) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>limitata</u>, cioè esiste una costante $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \le M \quad \forall x \in [a,b]$

(cioè il grafico è compreso nella striscia tra $-M$ e M)

<u>Due varianti</u> Per definizione si pone

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

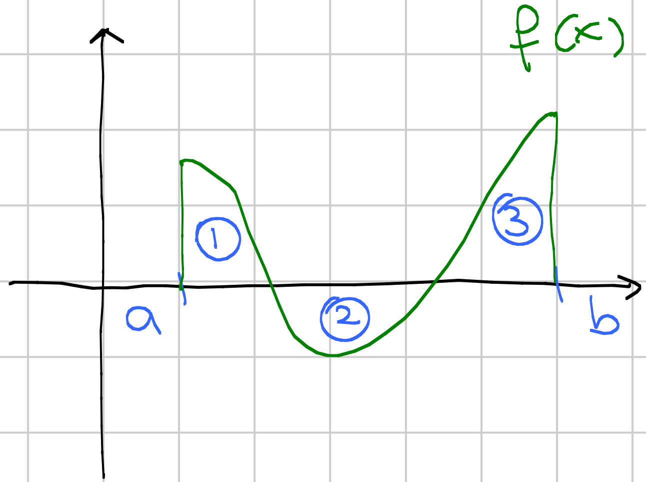
si intende che $b > a$

② SIGNIFICATO GEOMETRICO

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{NUMERO}$$

L'integrale rappresenta l'AREA CON SEGNO della parte di piano compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse x.

Se la funzione non è sempre ≥ 0, l'integrale tiene conto con il segno $+$ delle aree sopra l'asse x e con il segno $-$ delle aree sotto asse x



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Area } ① + \text{Area } ③ - \text{Area } ②$$

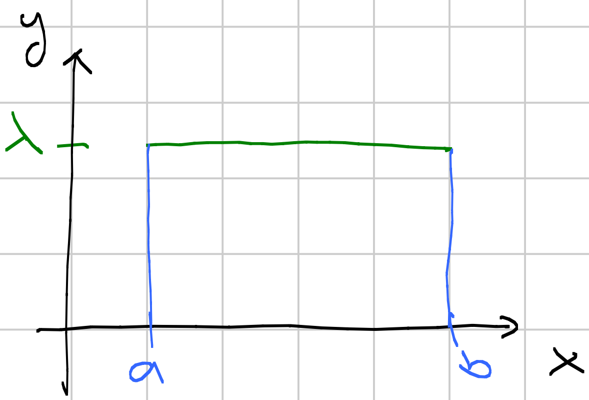
③ IDEA DELLA DEFINIZIONE

→ CASO BANALE
→ CASO SEMIBANALE
→ CASO GENERALE

CASO BANALE: $f(x)$ costante in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area con segno del rettangolo}$$

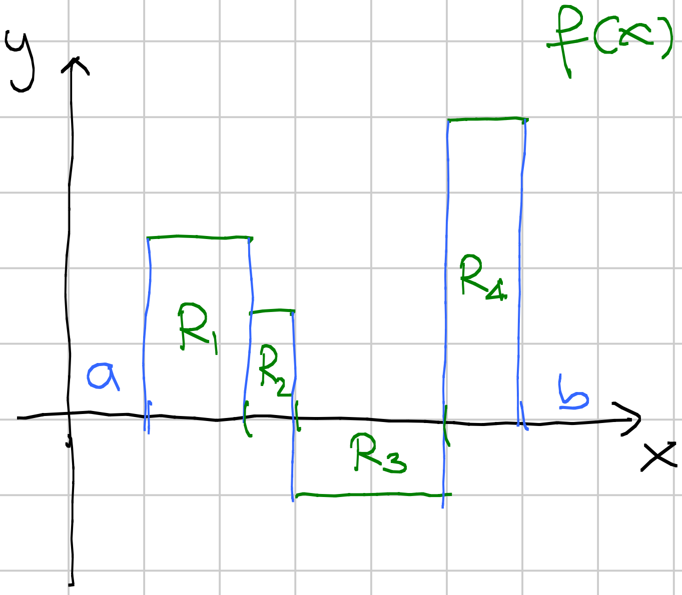
$$= \lambda\,\underbrace{(b-a)}_{\text{base}}$$



altezza con segno ($\lambda > 0 \Rightarrow$ integrale positivo
$\lambda < 0 \Rightarrow$ " negativo)

$\boxed{\text{CASO SEMIBANALE}}$ $f(x)$ COSTANTE A TRATTI

In questo caso la parte di piano tra asse x e grafico di $f(x)$ è un'unione finita di rettangoli.



In questo caso

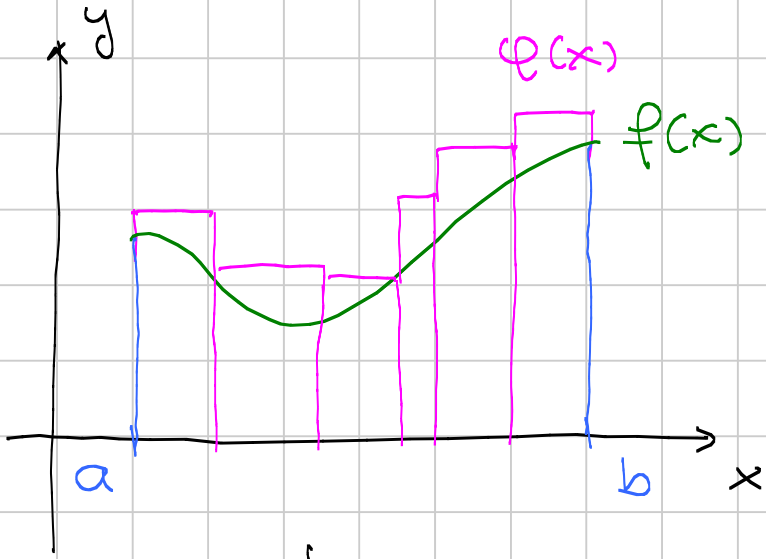
$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{somma algebrica aree rettangoli}$$

Queste funzioni si chiamano

COSTANTI A TRATTI
FUNZIONI A GRADINO
STEP FUNCTIONS

} SINONIMI

CASO GENERALE



Considero una qualunque funzione a gradino $\varphi(x)$ che sia $\geq f(x) \ \forall x \in [a,b]$

Intuitivamente, $\int_a^b f(x)\,dx$ (che devo ancora definire) è + piccolo di $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ che ho già definito.

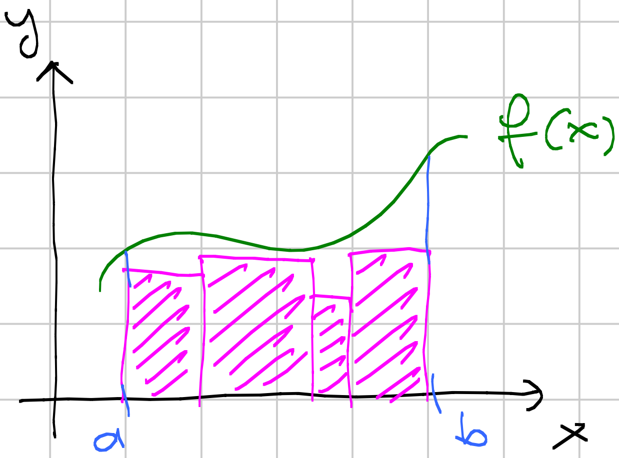
Si definisce INTEGRALE SUPERIORE di $f(x)$ in $[a,b]$ l'estremo inferiore di

$\int_a^b \varphi(x)\,dx$, al variare di $\varphi(x)$ tra tutte le funzioni a gradino t.c. $\varphi(x) \geq f(x) \ \forall x \in [a,b]$.

Si indica con $I^+(f; [a,b])$

L' integrale INFERIORE di $f(x)$ in $[a,b]$ si definisce come l' estremo superiore di

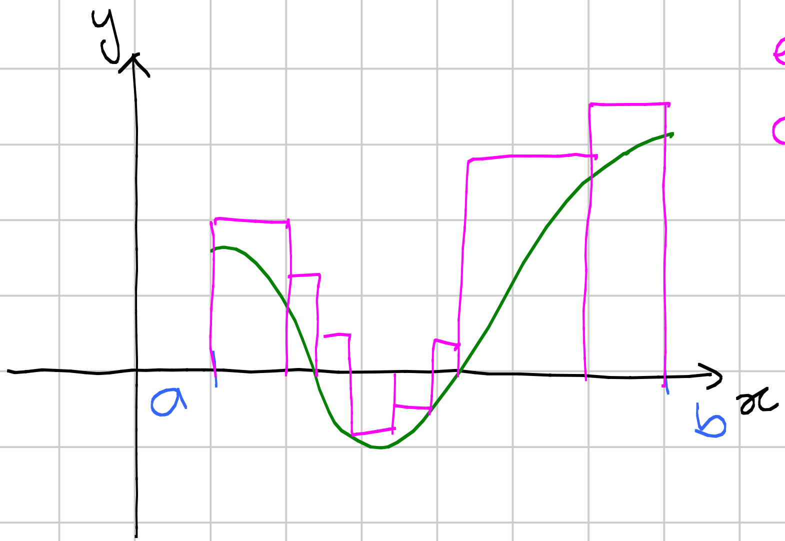
$\int_a^b \varphi(x)\,dx$, al variare di $\varphi(x)$ fra



tutte le funzioni a gradino t.c.
$\varphi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.
Si indica con

$$I^{-}(f; [a,b])$$

Oss.



esempio di funzione a gradino $\geq f(x)$

Si ha <u>sempre</u> che $I^+(f;[a,b]) \geq I^-(f;[a,b])$.

<u>Spesso</u> succede che $I^+(f;[a,b]) = I^-(f;[a,b])$.

In questo caso si dice che $f(x)$ è INTEGRABILE in $[a,b]$, e il valore comune è l'integrale.

Le seguenti classi di funzioni sono integrabili

* tutte le funzioni continue
* " " " monotone
* " " " con un numero finito di punti di discontinuità, in cui esistono limite destro e sinistro

<u>Oss.</u> Il fatto che la funzione sia limitata assicura che esistono funzioni a gradino $\geq f(x)$ ed
" " " " $\leq f(x)$

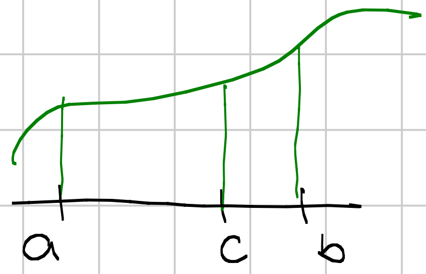
Proprietà dell'integrale

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = \text{Nulla di Furbo!!!}$$

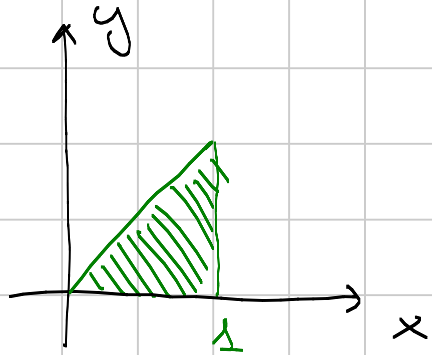
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$



Oss. Quelle che abbiamo usato per costruire I^+ e I^- si chiamano SOMME DI RIEMANN (superiori e inferiori)
L'integrale si chiama INTEGRALE DI RIEMANN

Esempio 1

$$\int_0^1 x\,dx =$$

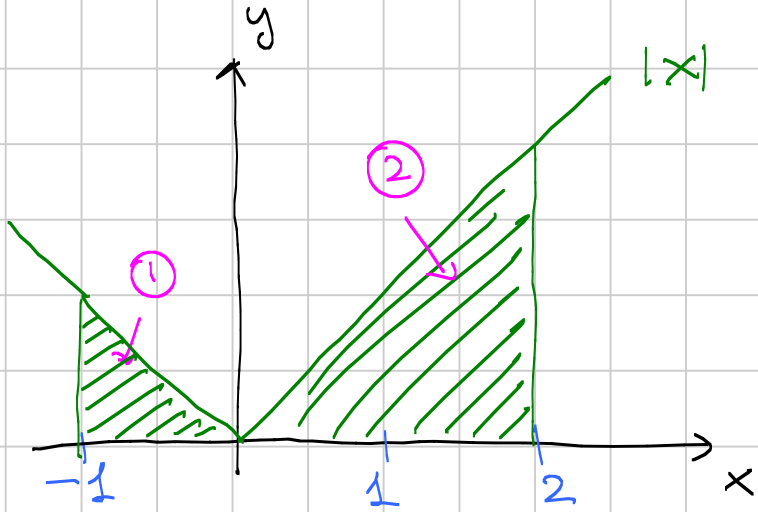


$= \text{area triangolo}$

$= \frac{1}{2}$

Esempio 2

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx =$$



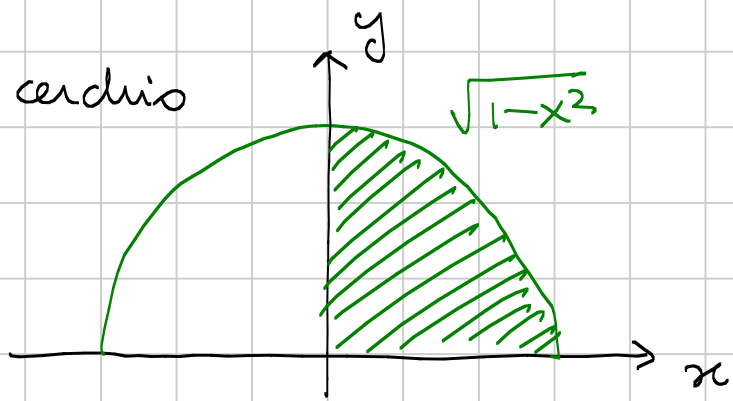
$= \text{Area } ① + \text{Area } ② = \frac{1}{2} + 2$

$= \frac{5}{2}$

Esempio 3

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\,\text{Area cerchio}$$

$= \frac{\pi}{4}$



$y = \sqrt{1-x^2}$

$y^2 = 1-x^2, \quad y^2+x^2=1$