MATEMATICA I

ORA 62

Titolo nota 20/11/2007

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

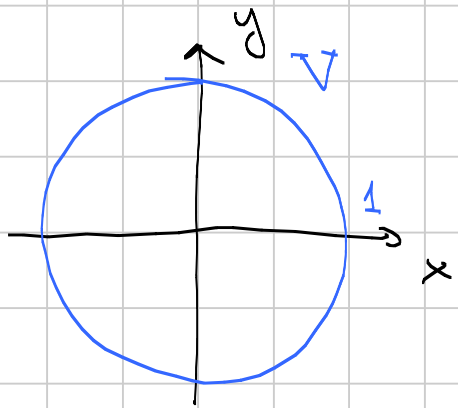
Metodo per cercare candidati p.ti di max./min sul bordo

Def. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione. L'insieme

$$V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\boxed{\Phi(x,y) = 0}}_{\text{Equazione di } V} \}$$

si dice LUOGO DI ZERI della funzione $\Phi(x,y)$.

Esempio



$$V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1 \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \overbrace{x^2+y^2-1}^{\Phi(x,y)} = 0 \}$$

Metodo dei moltiplicatori

Siano $\Phi(x,y)$ e $f(x,y)$ 2 funzioni differenziabili. Sia V il luogo di zeri di $\Phi(x,y)$.
Allora gli eventuali p.ti di max / min della funzione $f(x,y)$ sull'insieme V si trovano in una delle seguenti 2 categorie

$\boxed{\text{Soluzioni del 1° sistema}}$ → PUNTI SINGOLARI DI V

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

3 equazioni, 2 incognite (x e y) (spesso questo sistema non ha soluzioni)

$\boxed{\text{Soluzioni del 2° sistema}}$ → PUNTI STAZIONARI SU V

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda \phi_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda \phi_y(x,y) \\ \phi(x,y) = 0 \end{cases}$$

3 equazioni, 3 incognite: x, y, λ (spesso questo sistema ha un numero finito di soluzioni)

Operativamente Devo fare max / min di $f(x,y)$ su un insieme V

1. Scrivo V come luogo di zeri di una funzione $\Phi(x,y)$
2. Risolvo il primo sistema: tutte le soluzioni ottenute sono candidati
3. Risolvo il secondo sistema; prendo le terne (x,y,λ) che risolvono il sistema, dimentico il λ, e le coppie (x,y) così ottenute sono i candidati.

— o — o —

Oss. Il 1° sistema cerca i p.ti di V (vedi 3ª eq.) in cui $\nabla\Phi$ si annulla

Il 2° sistema cerca i p.ti di V (vedi 3ª eq.) in cui

$$\nabla f = \boxed{\lambda}\, \nabla \Phi$$

, cioè ∇f è multiplo di $\nabla\Phi$

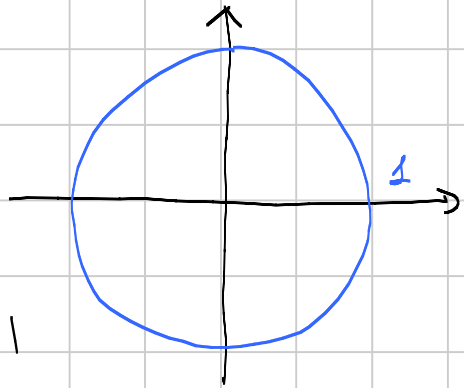
MOLTIPLICATORE

Esempio 1

$$\operatorname{Max}\{x+3y \,:\, x^2+y^2=1\}$$
$$\min\{\quad \text{"} \quad\}$$

$$f(x,y) = x+3y$$

L'insieme su cui cerco max / min è la circonferenza (SOLO BORDO).



L'insieme è luogo di zeri di $\Phi(x,y) = x^2+y^2-1$

$\boxed{1^\circ \text{ sistema}}$

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \to x = 0 \\ \to y = 0 \end{matrix} \Bigg\}$$

incompatibili con 3^a eq.

$\boxed{2^\circ \text{ sistema}}$

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 3 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

1^a eq. $\longrightarrow \quad x = \dfrac{1}{2\lambda}$ $\qquad$ 2^a eq. $\longrightarrow \quad y = \dfrac{3}{2\lambda}$

(λ non può essere $=0$, altrimenti 1^a e 2^a eq. sono impossibili)

Sostituisco nella 3^a eq. $\quad \left(\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 10 = 4\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

Dato λ, calcolo x e y

$$\lambda = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \longrightarrow x = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad y = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

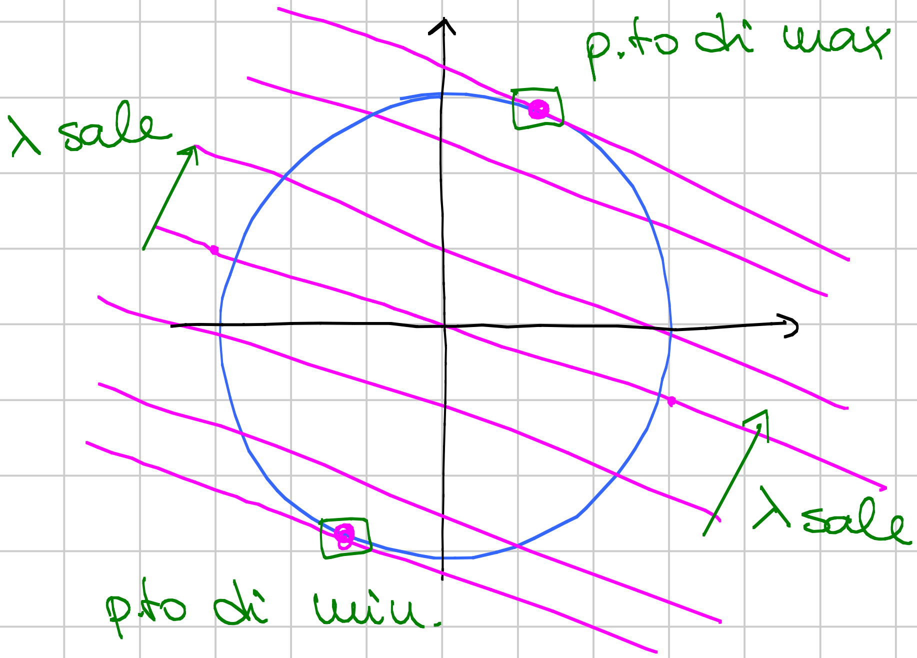
$$\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \longrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \quad y = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

Candidati: $\quad \left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) \qquad \left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, -\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

PUNTO DI MAX $\qquad$ PUNTO DI MIN

In termini di linee di livello $\qquad f(x,y)=\lambda\,,\quad x+3y=\lambda$

$$y=-\frac{x}{3}+\frac{\lambda}{3}$$



— o —

<u>Esempio 2</u>

$$\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\left\{\, y-x^2 \,:\, \underbrace{x^2+y^2=1}_{} \,\right\} \qquad f(x,y)=y-x^2$$

insieme come prima

W $\Rightarrow$ max e min esistono

1° sistema: stesso dell'esempio precedente $\Rightarrow$ nessuna soluzione

2° sistema:
$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\cancel{2}x = \cancel{2}\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \rightarrow \lambda x + x = 0$$

1ª eq. $\quad x(\lambda+1)=0$

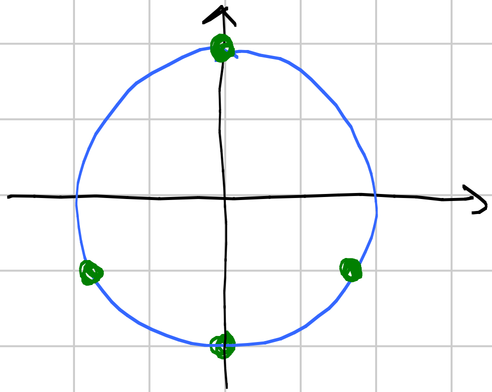
$x=0 \xrightarrow{(3^a\ eq.)} y^2=1 \rightarrow y=\pm 1 \rightarrow (0,1),\ (0,-1)$

$\lambda=-1 \xrightarrow{(2^a\ eq.)} 1=-2y \rightarrow y=-\frac{1}{2}$

$\xrightarrow{(3^a\ eq.)} x^2+\frac{1}{4}=1,\quad x^2=\frac{3}{4},\quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

In totale ho 4 candidati:



Sostituisco in $f(x,y) = y - x^2$

$f(0,1) = 1$

$f(0,-1) = -1$

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$

Max: 1 p.to di max: $(0,1)$

min: $-\frac{5}{4}$ p.ti di min: $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Linee di livello $y - x^2 = \lambda$

$y = x^2 + \lambda$