MATEMATICA I

ORA 57

Titolo nota 14/11/2007

LIMITI E CONTINUITÀ PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Definizione di limite (esempio in 2 variabili)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & ① \\ +\infty & ② \\ -\infty & ③ \\ \text{N.E.} & ④ \end{cases}$$

④ (Nessuno dei precedenti)

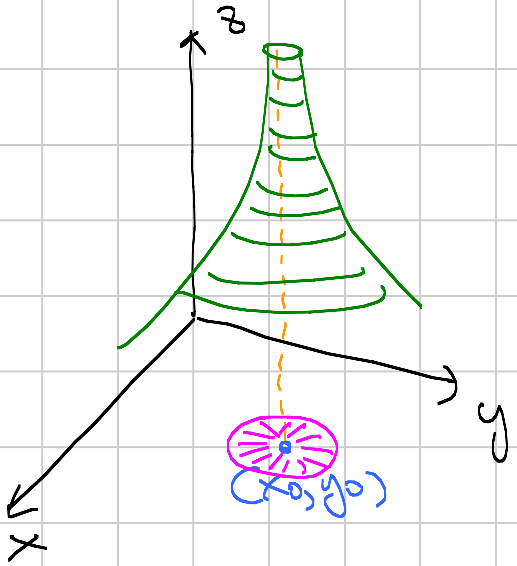
Def. di ② Si dice che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty \quad \text{se}$$

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists \delta > 0$ (raggio del cerchio)

t.c. $f(x,y) \geq M$



$\forall (x,y) \in$ cerchio con centro in (x_0,y_0) e raggio δ meno (x_0,y_0) stesso

Def di ③ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. negativo)

$\exists \delta > 0$ t.c.

$f(x,y) \leq M \quad \forall (x,y) \in$ cerchio con raggio δ
meno punto stesso

Def. di ① Si dice che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists \delta > 0$ (raggio del cerchio)

t.c. $l - \varepsilon \leq f(x,y) \leq l + \varepsilon \quad \forall (x,y) \in$ cerchio....

—o—o—

Un punto (x,y) sta nel cerchio con centro (x_0,y_0) e raggio δ
se e solo se $\quad dist((x,y),(x_0,y_0)) < \delta$

In notazione vettoriale: $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (centro), $\delta > 0$ (raggio)

$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n ; dist(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta\}$ = generalizzazione del cerchio ad $\mathbb{R}^n$
= p.ti la cui distanza da x_0 è $< \delta$

Detto meglio $\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\| \vec{x} - \vec{x}_0 \|}_{\text{distanza tra } \vec{x} \text{ e } \vec{x}_0} \leq \delta \}$

Definizione di ② usando la notazione vettoriale

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se

VETTORI

$\forall M \in \mathbb{R}$ (M è un numero)

$\exists \delta > 0$ (raggio: numero)

t.c.

$f(x) \geq M \quad \forall x$ t.c. $|x - x_0| < \delta$

$x \neq x_0$

NORMA

La definizione di limite in una variabile diventa quella in più variabili usando la notazione vettoriale e sostituendo i valori assoluti con le norme

$\boxed{\text{CONTINUITÀ}}$ Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si dice che f è continua in $\vec{x}_0$ se e solo se

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

$\uparrow$ = VETTORE

"META-TEOREMA" Ogni funzione ottenuta a partire da quelle elementari mediante op. alg. e/o composizioni è continua dove non presenta problemi

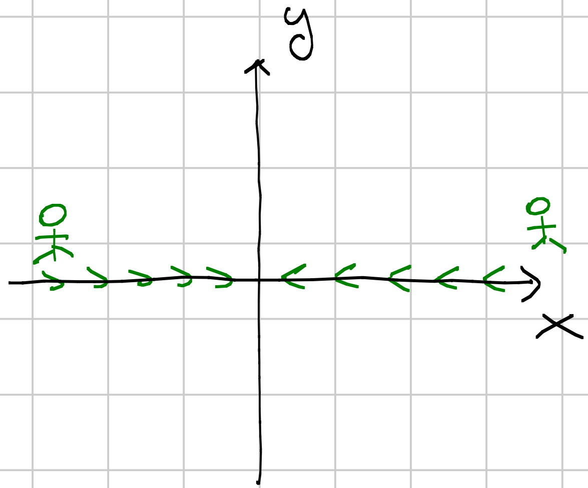
Esempio 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\cos(xy)) + \cos(\sin(x+y))}{2e^{x^2y} - \arctan(xe^y)} = \frac{1+\sin 1}{2}$$

Basta sostituire $(x,y) \rightsquigarrow (0,0)$

Non ci sono problemi di nessun tipo

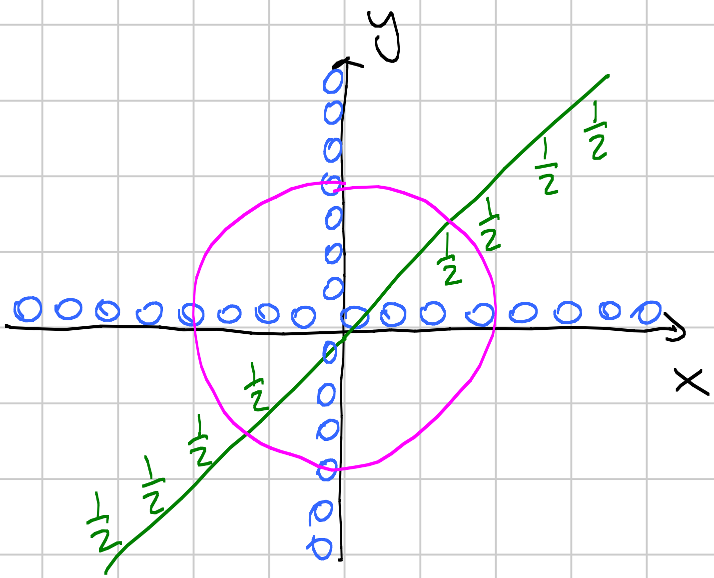
Esempio 2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $\left[\dfrac{0}{0}\right]$



Su tutto l'asse x la funzione vale (tranne nell'origine) 0.
Quindi il limite (se esiste) vale 0.

Sull'asse y stessa cosa. $f(0,y)=0$.

Sulla bisettrice $y=x$ la funzione vale $f(x,x)=\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$



In ogni cerchio (anche piccolissimo) con centro in $(0,0)$ esistono punti in cui $f=0$ e punti in cui $f=1/2$.

Questo IMPEDISCE al limite di esistere

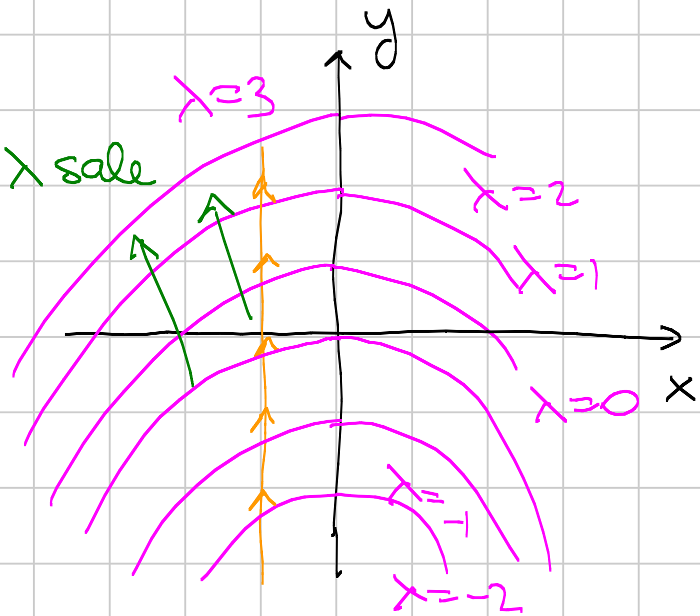
"IN 2 (o più) VARIABILI I LIMITI DI FORME INDETERMINATE NON ESISTONO QUASI MAI"

— o — o —

Esempio $f(x,y) = x^2+2y$. Linee di livello

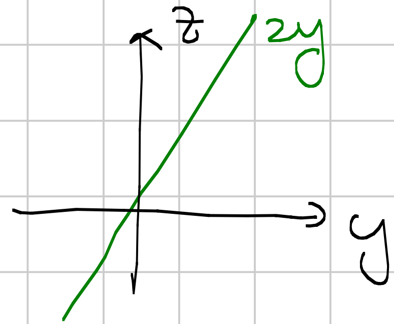
$f(x,y) = \lambda \qquad x^2+2y=\lambda \qquad y = -\frac{x^2}{2}+\frac{\lambda}{2}$

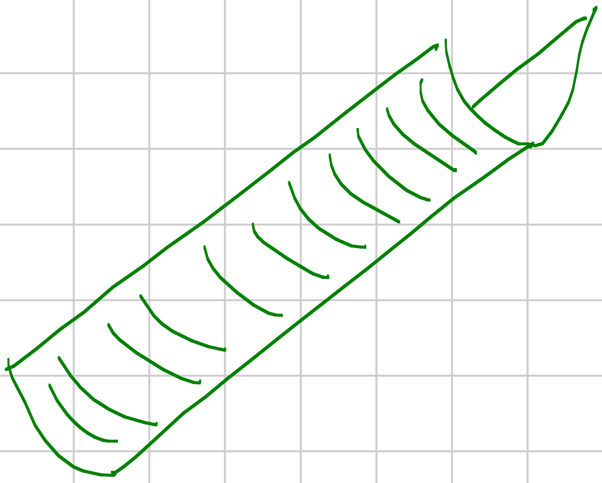
Al variare di λ abbiamo una famiglia di parabole ottenute l'una dall'altra mediante traslazione in verticale



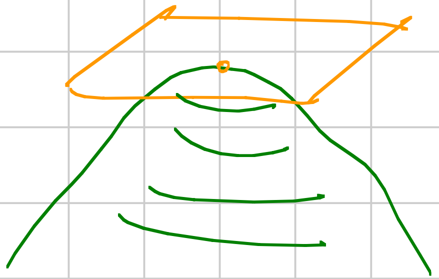
Un omino che percorre l'asse y verso l'alto si trova a quota

$f(0,y) = 2y$

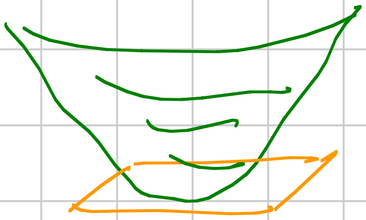




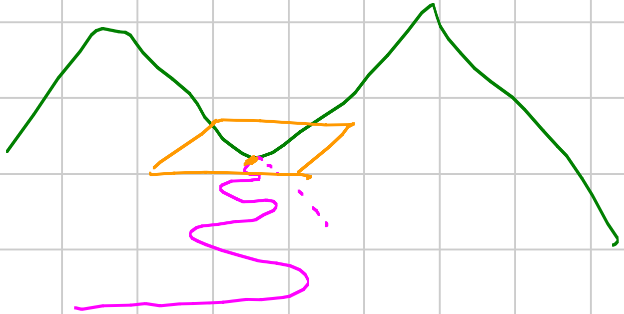
Intuitivamente: p.to stazionario = piano tg. // piano base



CIME DI MONTAGNA



FONDI DI LAGHI



MOUNTAIN PASS