Lo spazio R^n

$\vec{x} \in R^n \qquad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

VETTORE COMPONENTI (numeri reali)

R^2 = piano cartesiano

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \qquad \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

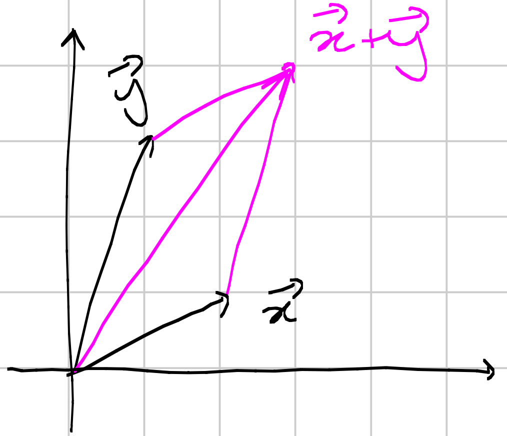
$\vec{x} + \vec{y} = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$ somma di 2 vettori

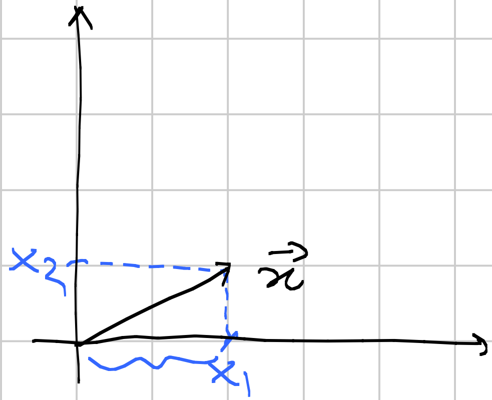
$\lambda \in R$ (λ è un numero)

$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ prodotto di un vettore per un numero

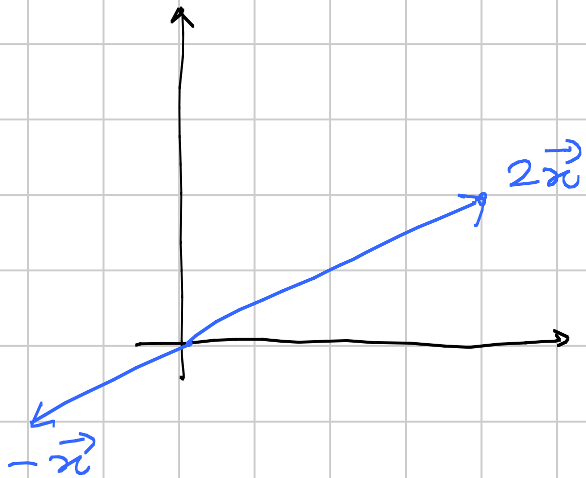
Il risultato è un vettore

Interpretazione in $\mathbb{R}^2$





Somma = regola del parallelogrammo



$\boxed{\text{NORMA DI UN VETTORE}}$

$$\|\vec{x}\| = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \text{LUNGHEZZA DEL VETTORE}$$

Notazioni equivalenti

DISTANZA TRA 2 VETTORI

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

Per $n = 2$ è sostanzialmente la classica formula della distanza tra 2 punti basata sul teo. di Pitagora.

Relazione tra distanza e norma

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \| \vec{x} - \vec{y} \|$$

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$

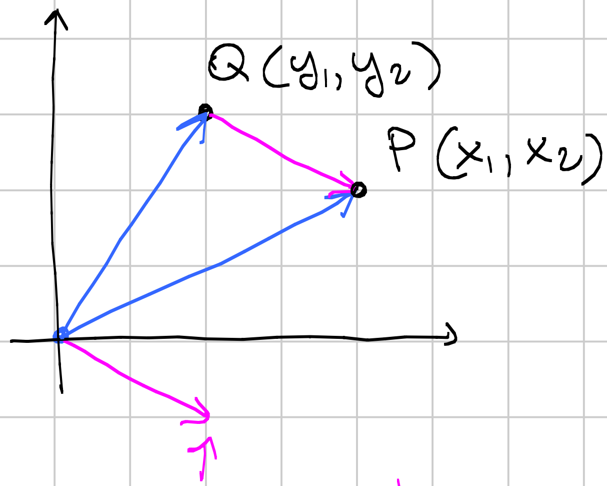
— o —

PUNTI O VETTORI? In $\mathbb{R}^2$ se scrivo (x_1, x_2) questo rappresenta un p.to oppure anche il vettore applicato nell'origine e punta della freccia in (x_1, x_2)

P e Q rappresentano 2 p.ti, ma anche 2 vettori.

La diff. tra i 2 vettori la posso rappresentare come

$$\vec{P} - \vec{Q} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$$



Questo è il vero vettore differenza

Pensando il vettore diff. come applicato in Q con p.ta della freccia in P è immediato che la distanza tra P e Q è la norma (cioè la lunghezza) del vettore differenza.

— o — o —

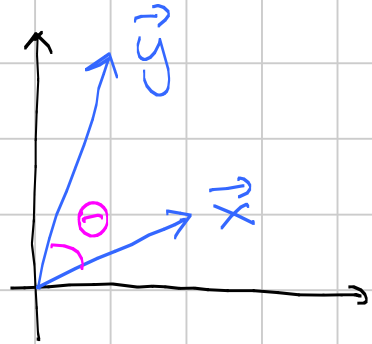
$\boxed{\text{PRODOTTO SCALARE TRA 2 VETTORI}}$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Altre notazioni
$(\vec{x}, \vec{y})$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

INPUT: 2 vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$
OUTPUT (risultato): numero (SCALARE)

GEOMETRICAMENTE :



$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\theta$$

prod. scalare tra 2 vettori

prod. di numeri

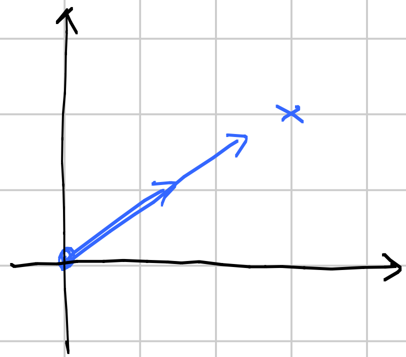
angolo compreso

Oss. ① Siano $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vettori non nulli (il vettore nullo è quello che ha tutte le componenti $=0$).
Allora

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = \pm 90°$$
$$\iff \vec{x} \text{ e } \vec{y} \text{ sono perpendicolari}$$

$\boxed{\text{VERSORI}}$ Un versore è un qualunque vettore di lunghezza unitaria.

Due vettori che sono uno multiplo dell'altro indicano la stessa direzione. Se il coeff. è positivo allora indicano anche lo stesso verso (ogni direzione ha 2 versi)



I versori sono in corrispondenza biunivoca con i possibili versi

Oss. 2 Ogni vettore $\vec{x}$ non nullo è multiplo di un unico versore

$$\vec{x} = \boxed{\|\vec{x}\|} \cdot \boxed{\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}}$$

FATTORE DI MOLTEPLICITÀ

VERSORE

Oss. ③ Siano $\vec{x}$ e $\vec{y}$ 2 versori. Quanto può valere al max $\vec{x} \cdot \vec{y}$? E al minimo ?

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \underbrace{\|\vec{x}\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|\vec{y}\|}_{=1} \cdot \cos\theta$$

$\theta = 0°$

$\vec{x} \cdot \vec{y}$ al massimo vale 1 quando i 2 versori sono uguali
" " minimo " -1 " " " " opposti

$\theta = 180°$

Qualche proprietà algebrica

$\vec{x}$ vettore, λ numero, allora

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

NORMA

VAL. ASSOL. DI UN NUMERO

NORMA

$$\|\lambda \vec{x}\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2}$$
$$= \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$
$$= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$
$$= |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

$\vec{x}$ e $\vec{y}$ vettori, λ, μ numeri

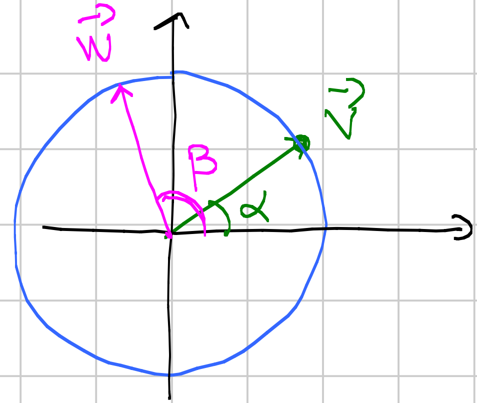
$$(\lambda \vec{x}) \cdot (\mu \vec{y}) = \lambda \mu \, \vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \qquad \mu \vec{y} = (\mu y_1, \dots, \mu y_n)$$

$$(\lambda \vec{x}) \cdot (\mu \vec{y}) = \lambda x_1 \cdot \mu y_1 + \lambda x_2 \cdot \mu y_2 + \dots + \lambda x_n \cdot \mu y_n$$

$$= (\lambda \mu)(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)$$

In $\mathbb{R}^2$ un versore si può scrivere nella forma $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ (è un pto della circ. trigonometrica)



Siano $\vec{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$
$\vec{w} = (\cos\beta, \sin\beta)$

2 versori in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta = \cos(\underbrace{\beta - \alpha}_{\text{angolo compreso fra i 2 versori}})$$

Questo dimostra l'interpretazione geom. del prod. scalare nel caso di versori di $\mathbb{R}^2$.

— o — o —

In generale in $\mathbb{R}^2$ siano dati 2 vettori non nulli $\vec{x}$ e $\vec{y}$

Per un' oss. prec. $\vec{x} = \|\vec{x}\| \vec{v}$, $\vec{y} = \|\vec{y}\| \vec{w}$

dove $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono i versori corrispondenti a $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Ma allora

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\|\vec{x}\| \vec{v}) \cdot (\|\vec{y}\| \cdot \vec{w})$$

angolo fra $\vec{v}$ e $\vec{w}$
= angolo fra $\vec{x}$ e $\vec{y}$

$$= \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\theta$$