MATEMATICA I

ORA 53

Titolo nota 13/11/2007

SUCC. PER RICORRENZA $\boxed{\text{NON}}$ AUTONOME

$\boxed{\text{Esempio 1}}$ $a_1 = 2007$ $\qquad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$

$a_1 = 2007 \qquad a_2 = \dfrac{a_1}{1} = 2007 \qquad a_3 = \dfrac{2007}{2}, \ldots$

Idea: $a_n \to 0$ (in realtà si può anche scrivere la formula esplicita per a_n: TROVARLA !!!)

$\boxed{\text{PIANO 1}}$

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

PIANO CON LA MONOTONIA

$\boxed{\text{Dim. (i)}}$ Induzione: $\boxed{n=1}$ $a_1 \geq 0$ $2007 \geq 0$ Ok

$\boxed{\text{P.I.}}$ Ipotesi: $a_n \geq 0$ Tesi: $a_{n+1} \geq 0$

Dim. $a_{n+1} = \dfrac{\overbrace{\boxed{a_n}}^{\geq 0}}{\underbrace{\boxed{n}}_{>0}} \geq 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n$; $\dfrac{a_n}{n} \overset{?}{\leq} a_n$ $\underbrace{a_n}_{\geq 0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\geq 0} \overset{?}{\geq} 0$

Segue dal punto (i)

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ (i) + (ii) +
Teo. succ. monotone

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$ $\boxed{a_{n+1}} = \dfrac{\boxed{a_n} \to \ell}{\boxed{n} \to +\infty}$

$\ell = 0$

$\dfrac{a_n}{n} \to \dfrac{\ell}{n}$

NOOOO!!!! limite metà per volta

$\boxed{\text{PIANO 2}}$ (i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ← COME PRIMA] PIANO CON RAPPORTO

(ii) $a_n \to 0$

Dim (ii) Uso il criterio del rapporto per le successioni (lo posso fare perché $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a_n}{n}}{a_n} = \frac{\cancel{a_n}}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} = \frac{1}{n} \to 0 < 1$$

Limite del rapporto $< 1 \Rightarrow a_n \to 0$.

$\boxed{\text{PIANO 3}}$ (i) $0 \leq a_n \leq 2007 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\text{PIANO CON I CARABINIERI}}$

(ii) $a_n \to 0$

Dim (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ COME PRIMA

$a_n \leq 2007$ lo dimostro per induzione

$\boxed{n=1}$ $a_1 \le 2007$ VERO

$\boxed{\text{P.I.}}$ Ipotesi: $a_n \le 2007$ Tesi: $a_{n+1} \le 2007$

Dim. $$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} \underset{\text{Uso Hp}}{\le} \frac{2007}{n} \le \frac{2007}{1} = 2007$$

Uso Hp

Den. + piccolo ⇒ fraz. + grande

Dim (ii) Sappiamo dal p.to (i) che $0 \le a_n \le 2007$

Divido tutto per n

$$0 \le \frac{a_n}{n} \le \frac{2007}{n}$$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{0}} \le \underset{\Downarrow \atop 0}{\boxed{a_{n+1}}} \le \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{\frac{2007}{n}}}$$

Se $a_{n+1} \to 0$, anche

$a_n \to 0$.

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + \arctan n}{a_n + n + 5} \qquad a_0 = 2007$$

$\boxed{\text{PIANO CON CARABINIERI}}$

(i) $0 \le a_n \le 10.000$

(ii) $a_n \to 0$

Dim (i) Dimostriamo che $a_n \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{n=0}$ $2007 \geq 0$ Ok

$\boxed{\text{P.I.}}$ ipotesi: $a_n \ge 0$ tesi $a_{n+1} \ge 0$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + \arctan n}{a_n + n + 5} \qquad \frac{\text{Num} \ge 0}{\text{Den} > 0} \Rightarrow \text{Frazione} \ge 0$$

— o —

Dimostriamo che $a_n \le 10.000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{n=0}$ $a_0 \le 10.000$ $2007 \le 10.000$ Ok.

$\boxed{\text{P.I.}}$ Ipotesi: $a_n \le 10.000$ Tesi: $a_{n+1} \le 10.000$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + \arctan n}{a_n + n + 5} \le \frac{20.000 + 14}{n+5} \le \frac{20.014}{5} = 4.000 + \text{poco} \le 10.000$$

Ho usato che $2a_n \le 20.000$ (ipotesi induttiva)

$\arctan n \le 14$

Al posto del den. ho scritto roba + piccola

— o — o —

Dim (ii)

Num. + grande
den. + piccolo

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{0}} \le \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{\frac{2a_n + \arctan n}{a_n + n + 5}}} \le \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\boxed{\frac{20.014}{n}}}$$

$a_{n+1} \to 0$, quindi anche $a_n \to 0$.

$\boxed{\text{Esempio 3}}$ $a_1 = 2$ $a_{n+1} = \frac{n^4}{2^n} a_n$

$a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2^1} a_1 = 1$, $a_3 = \frac{2^4}{2^2} a_2 = 4$

$a_4 = \frac{3^4}{2^3} a_3 = \frac{81}{8} \cdot 4 = \frac{81}{2} = 40,5$

$a_5 = \frac{4^4}{2^4} a_4 = 16 \cdot a_4 = 16 \cdot 40,5 = +$ di 600

Idea: $a_n \to +\infty$ crescendo. $\boxed{\text{Invece: } a_n \to 0}$

$\boxed{\text{PIANO CON RAPPORTO}}$ (i) $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ INDUZIONE

(ii) $a_n \to 0$

Dim (ii) Uso criterio rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\boxed{\frac{n^4}{2^n} \cancel{a_n}}}^{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} = \frac{n^4}{2^n} \to 0$

Rapporto $\to 0 < 1 \Rightarrow$ $a_n \to 0$

Esempio 4 $\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{n} \qquad a_1 = 3$

$$\boxed{a_{n+1}} = \frac{\boxed{a_n^2}}{\boxed{n}} \qquad a_n^2 \to \ell^2, \quad n \to +\infty$$

$$\ell = 0$$

NO!!!!!!

ANDREBBE BENE SE UNO GIÀ SAPESSE CHE

$$a_n \to \ell \boxed{\in \mathbb{R}}$$

PIANO (i) $a_n \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \to +\infty$

Supponiamo di aver dimostrato il p.to (i). Allora

$$\boxed{a_{n+1}} = \frac{a_n^2}{n} \geq \frac{(2^n)^2}{n} = \boxed{\frac{4^n}{n}}$$

$a_{n+1} \to +\infty$ per confronto a 2

Uso p.to (i)

$\dfrac{4^n}{n} \to +\infty$

Visto che $a_{n+1} \to +\infty$, anche $a_n \to +\infty$

Dim. (i) Induzione $\boxed{n=1}$ $a_1 \geq 2^1$ $3 \geq 2$ Ok.

$\boxed{\text{P.I.}}$ Ipotesi : $a_n \geq 2^n$ Tesi : $a_{n+1} \geq 2^{n+1}$

Dim. $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{n} \geq \dfrac{4^n}{n} \geq 2^{n+1}$

Uso ipotesi come prima

SPERO

$\dfrac{4^n}{n} \overset{?}{\geq} 2^{n+1}$ $\dfrac{\cancel{2^n} \cdot 2^n}{n} \overset{?}{\geq} \cancel{2^n} \cdot 2$ $2^n \overset{?}{\geq} 2n$

$2^{n-1} \overset{?}{\geq} n$ Risposta: SI! Dimostrata a suo tempo per induzione

$(1+x)^n \geq 1+nx$ la applico con $x=1$

$2^n \geq 1+n$