SUCC. PER RICORRENZA SPIRALEGGIANTI

Esempio $a_{n+1} = \dfrac{2}{a_n + 1}$ $a_0 = 2$

$f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

$\boxed{f(x) = x} \iff \dfrac{2}{x+1} = x$

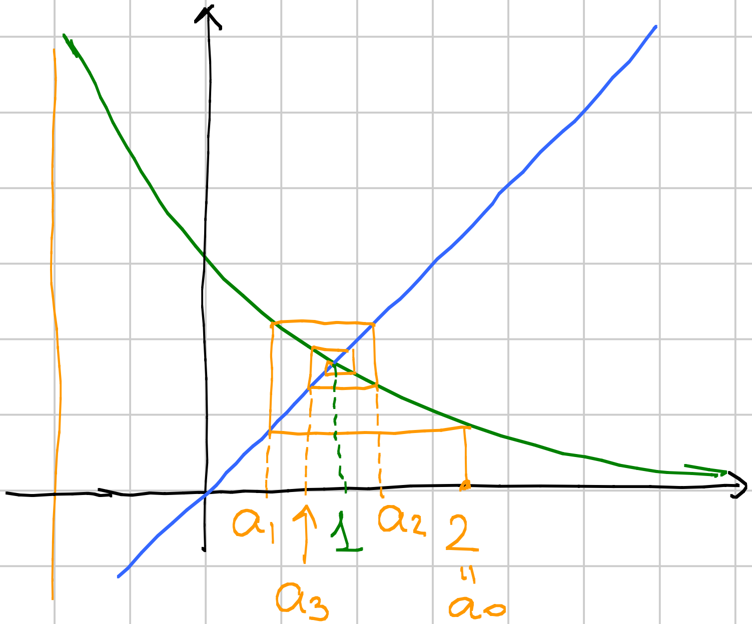
Serve a det. intersezioni con bisettrice

$x^2 + x = 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$



Idea: $a_n \to 1$ "spiraleggiando"

2 tipi di piano → CON LE 2 SOTTOSUCCESSIONI
→ CON LA DISTANZA

$\boxed{\text{Piano } 1^o \text{ tipo}}$ Esamino separatamente i pari e i dispari

(i) $a_{2n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{2n+2} \leq a_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_{2n} \to \ell \in \mathbb{R}$

(i') $a_{2n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii') $a_{2n+3} \geq a_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii') $a_{2n+1} \to m \in \mathbb{R}$

$$\ell = m = 1$$

$\boxed{\text{Dim. punti (i), (ii), (i'), (ii')}}$

$a_0 = 2 \qquad a_1 = \frac{2}{3}$

$$a_2 = \frac{2}{1+a_1} = \frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5}$$

Così abbiamo verificato che

$$1 \leq a_2 \leq a_0$$

Poichè f è strett. decrescente, posso applicare f INVERTENDO le disuguaglianze ottengo

$$f(1) \geq f(a_2) \geq f(a_0)$$
$$1 \geq a_3 \geq a_1$$

riapplico f

$$f(1) \leq f(a_3) \leq f(a_1)$$
$$1 \leq a_4 \leq a_2$$

applico f

$$f(1) \geq f(a_4) \geq f(a_2)$$
$$1 \geq a_5 \geq a_3$$

Formalmente: dimostro per induzione CONTEMPORANEAMENTE

$$\boxed{1 \leq a_{2n+2} \leq a_{2n} \quad e \quad a_{2n+1} \leq a_{2n+3} \leq 1}$$

FARE VERIFICA

Punti (iii) e (iii'): seguono dalle monotonie e limitatezze

$\boxed{\text{Punto (iv)}}$ $$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}$$ Però non conosco se esiste il limite di a_n

$$a_{2n+1} = \frac{2}{a_{2n} + 1} \qquad a_{2n+2} = \frac{2}{a_{2n+1} + 1}$$

$$m = \frac{2}{l+1} \qquad l = \frac{2}{m+1}$$

$$\begin{cases} m = \dfrac{2}{l+1} \\ l = \dfrac{2}{m+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} ml + m = 2 \\ ml + l = 2 \end{cases}$$

SOTTRAGGO

$$m - l = 0 \Rightarrow m = l$$

$$l = 1 \Leftarrow l = \frac{2}{l+1}$$

$\boxed{\text{2° PIANO}}$ (CON LA DISTANZA)

Idea: a_n salta a dx e sx di 1, ma si avvicina sempre a 1, cioè la distanza tra a_n e 1 diminuisce.

Distanza tra a_n e 1 è $\quad d_n = |a_n - 1|$

Considero d_n. Vorrei dimostrare che $d_n \to 0$. Questo dimostrerebbe che $a_n \to 1$

PIANO SBAGLIATO

(i) $d_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ BANALE

(ii) $d_{n+1} \leq d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ POI SI FA

(iii) $d_n \to \ell \in \mathbb{R}$ BANALE

(iv) $\ell = 0$ NON SI RIESCE

DIM. PUNTO (iii)

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = \left| \frac{2}{a_n+1} - 1 \right| = \left| \frac{2 - a_n - 1}{a_n + 1} \right| =$$

$$= \left| \frac{1 - a_n}{1 + a_n} \right| = \frac{|1 - a_n|}{|1 + a_n|} = \frac{d_n}{\underbrace{1 + a_n}}$$

basta sapere che $a_n \geq 0$

$\leq d_n$

perché denom. ≥ 1

Senza grossa fatica abbiamo dim. che $d_{n+1} \leq d_n$

SBAGLIATO Dire che $d_n \geq 0$ sempre e d_n decr.

$\Rightarrow d_n \to 0$ (potrebbe tendere a $\frac{1}{2}$)

Abbiamo dim. che

$$d_{n+1} = \frac{d_n}{1+a_n}$$

In realtà il valore + piccolo assunto da a_n non è 0, ma $a_1 = \frac{2}{3}$, quindi il denominatore è $\geq 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ e di conseguenza

$$d_{n+1} \leq \frac{d_n}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} d_n$$

PIANO VERO CON DISTANZA

(i) $\frac{2}{3} \leq a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \underbrace{\boxed{\frac{3}{5}}}_{}\, d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ <1

(iii) $d_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \to 0$

$\boxed{\text{PUNTO (i)}}$ Si dimostra come prima. INDUZIONE

$\boxed{n=0}$ $\frac{2}{3} \leq a_0 \leq 2$ Vera perchè $a_0 = 2$

$\boxed{\text{P.I.}}$ Ipotesi: $\frac{2}{3} \leq a_n \leq 2$ tesi: $\frac{2}{3} \leq a_{n+1} \leq 2$

Prendo l'ipotesi e applico $f(x)$ invertendo i versi perchè $f(x)$ è decresc. nell'intervallo dato

$$f\left(\frac{2}{3}\right) \geq f(a_n) \geq f(2)$$

$$2 \geq \underset{\shortparallel}{\frac{5}{6}} \geq \underset{\shortparallel}{a_{n+1}} \geq \underset{\shortparallel}{\frac{2}{3}}$$

$\boxed{\text{PUNTO (ii)}}$ Fatto prima: $d_{n+1} = \frac{d_n}{1+a_n} \leq \frac{d_n}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} d_n$

PUNTO (iii)

$$d_1 \le \frac{3}{5} d_0 \; ; \quad d_2 \le \frac{3}{5} d_1 \le \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} d_0 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 d_0$$

$$d_3 \le \frac{3}{5} d_2 \le \frac{3}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^2 d_0 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 d_0$$

Formalmente: per induz. si dim. che $d_{n+1} \le \left(\frac{3}{5}\right)^n d_0$

PUNTO (iv)

$$\boxed{0} \le \boxed{d_n} \le \boxed{\left(\frac{3}{5}\right)^n d_0}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

e qui è fondamentale che $\frac{3}{5} < 1$

— o — o —

Oss.

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = |f(a_n) - f(1)|$$

$$= |f'(\xi)| \cdot |a_n - 1|$$

$$= |f'(\xi)| \cdot d_n$$