MATEMATICA I

ORA 47

Titolo nota 07/11/2007

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

Con centro in $x_0 = 0$

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{o(x^n)}_{\text{errore che si commette approssimando } f(x) \text{ con } P_n(x)}$$

Con centro in $x_0 \neq 0$

$$f(x_0+h) = P_n(h) + o(h^n)$$

RESTO DI PEANO

$$f(x) = P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$$

In queste formule il resto è un "o piccolo", cioè è piccolo "al limite"

$$10^{10.000} x^{11} = o(x^{10})$$

QUALITATIVO

Con resto di Lagrange

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

con ξ compreso tra 0 e x

Con centro in $x_0 \neq 0$

$$f(x_0+h) = P_n(h) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

con ξ compreso tra x_0 e x_0+h

— o — o —

Calcolo approssimato di funzioni

Esempio 1 Voglio calcolare $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Se invece di calcolare $\sin \frac{1}{10}$, calcoliamo $P_3\left(\frac{1}{10}\right)$, cioè

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10^3}$$ quale errore commettiamo?

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5$$ Formula con $n=5$

$f(x) = \sin x \qquad f^{(5)}(x) = \sin x$

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| = \left|\frac{\sin \xi}{120}x^5\right| \le \frac{|x|^5}{120}$$

↑ ERRORE CHE COMMETTO APPROSSIMANDO $\sin x$ CON $P_3(x)$

Ponendo $x = \frac{1}{10}$ abbiamo che

$$\left|\sin\frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6000}\right| \le \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{10^5} = \frac{1}{12.000.000}$$

$$\left|\sin\frac{1}{10} - \frac{599}{6000}\right| \le \frac{1}{12.000.000}$$

Conclusione se dico $\sin\frac{1}{10} \sim \frac{599}{6000}$ commetto un errore minore di $\frac{1}{12.000.000}$ QUANTITATIVO

$$\frac{599}{6000} = 0{,}09983333 \qquad \sin\frac{1}{10} = 0{,}09983334$$

— o — o —

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $e^{1/10}$

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$e^{1/10} \sim 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} = \frac{6000+600+30+1}{6000}$$

$$= \frac{6631}{6000}$$

Stimare l' errore commesso

$$e^x = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 \qquad f^{(4)}(\xi) = e^{\xi}$$

$$\underbrace{\left| e^x - P_3(x) \right|}_{\text{ERRORE}} = \left| \frac{e^{\xi}}{4!} x^4 \right| = \frac{e^{\xi} x^4}{24}$$

Ponendo $x = \frac{1}{10}$ $\qquad \left| e^{\frac{1}{10}} - \frac{6631}{6000} \right| = \frac{e^{\xi}}{24} \cdot \frac{1}{10000}$

Dove sta ξ? Sta tra 0 e $x = \frac{1}{10}$, quindi $e^{\xi} < e^{\frac{1}{10}} < e^1 < 3$

Quindi $\qquad$ errore $\leq \frac{1}{80.000}$

$$\frac{6631}{6000} = 1,105166 \qquad e^{\frac{1}{10}} = 1,10517$$

$\boxed{2° \text{ UTILIZZO}}$ Dimostrazione di disuguaglianze

Esempio 1 Dimostrare che $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Utilizzo Taylor - Lagrange con $n=1$

$$f(x) = P_1(x) + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}x^2$$

$$e^x = 1+x + \underbrace{\frac{e^{\xi}}{2}x^2}_{\text{Questo è sempre } \geq 0} \geq 1+x$$

Cosa succede se prendo $n=2$?

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{e^{\xi}}{6}x^3}_{\substack{\geq 0 \text{ per } x \geq 0 \\ \leq 0 \text{ per } x \leq 0}}$$

Quindi

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \text{per } x \geq 0$$

$$e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \text{per } x \leq 0$$

Più in generale:

$$e^x \geq P_{2m+1}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

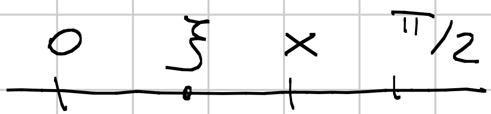
$$\begin{cases} e^x \geq P_{2m}(x) & \forall x \geq 0 \\ e^x \leq P_{2m}(x) & \forall x \leq 0 \end{cases}$$

— o —

<u>Esempio 2</u> $\quad f(x) = \sin x \qquad n = 1 \qquad f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x$

$$\sin x = x + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2} x^2$$

$$\sin x = x - \frac{\sin \xi}{2} x^2$$



Supponiamo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, allora

$0 < \xi < \frac{\pi}{2}$, quindi $\sin \xi > 0$

$$\sin x < x \quad \text{per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

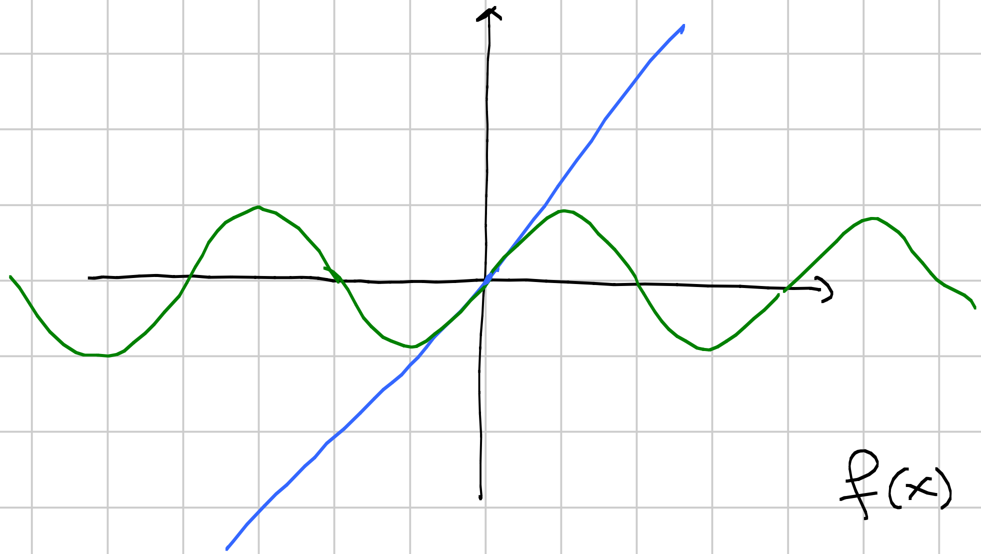
Per $x \geq \frac{\pi}{2}$ ho comunque sempre che

$$\sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$$

Conclusione: $\boxed{\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0}$ vale il segno di $=$ se e solo se $x = 0$

$$\boxed{\sin x \geq x \quad \forall x \leq 0}$$

segue da quella sopra dopo aver osservato che $\sin x$ e x sono DISPARI



Altro modo di dimostrare la disuguaglianza:

$$\sin x \overset{?}{\leq} x$$

$$f(x) = x - \sin x \overset{?}{\geq} 0$$

Studio $f(x)$. ① $f(0) = 0$

② $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ e $f'(x) = 0$ se e solo se $\cos x = 1 \iff x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

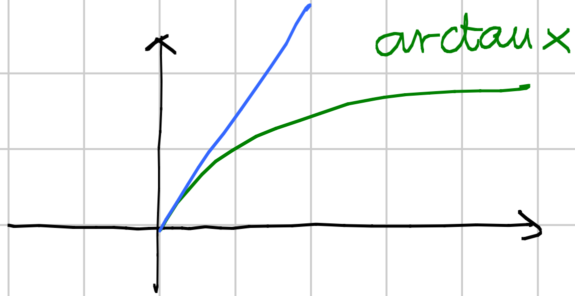
Monotonia 3 $\Rightarrow$ f è strettamente crescente.

Quindi $f(x) > 0$ per $x > 0 \rightsquigarrow \sin x < x$ per $x > 0$

$f(x) < 0$ per $x < 0 \rightsquigarrow \sin x > x$ per $x < 0$

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $\arctan x < x$ per $x > 0$

$\arctan x > x$ per $x < 0$



Studio la funzione $f(x) = x - \arctan x$

① $f(0) = 0$

② $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2} \geq 0$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ (annullamento sporadico)

$\Rightarrow$ per Monotonia 3 $f(x)$ è strett. cresc.

$\Rightarrow$ $f(x) > 0$ per $x > 0$
$f(x) < 0$ per $x < 0$