MATEMATICA I

ORA 45

Titolo nota 06/11/2007

ASINTOTI OBLIQUI

1. Un asintoto obliquo con $m=0$ è in realtà un asintoto orizzontale

2. Supponiamo che f sia derivabile e che esista $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ e che ci sia l'asintoto obliquo.
Allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} f'(x)$$

Sconsigliato: usare $\lim f'(x)$ per calcolare m.

Dim formule per calcolare m ed n

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$ è equivalente a dire che

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

Supponiamo che $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$. Allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - mx - n}{x} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\| $$

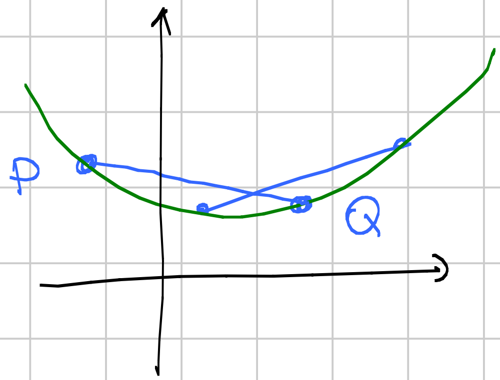
$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \underbrace{\boxed{\frac{n}{x}}}_{0} \right] \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

— o — o —

CONVESSITÀ, FLESSI, DERIVATA SECONDA

Una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ si dice CONVESSA in (a,b) se

è fatta così $\longrightarrow$

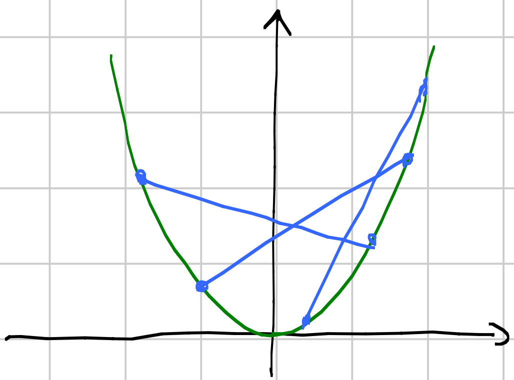


cioè

comunque presi 2 punti P e Q
sul grafico, il segmento PQ
sta al di sopra del grafico

Si dice concava se .... il segmento PQ sta sotto il grafico

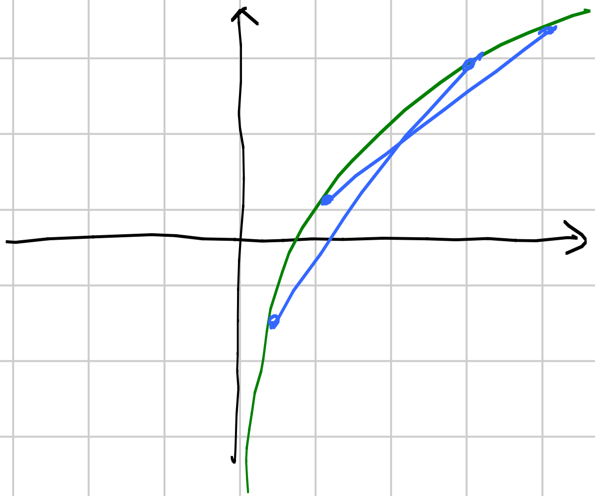
Esempio 1 $\quad f(x) = x^2$



CONVESSA su
tutto $\mathbb{R}$

Esempio 2 $f(x) = \log x$

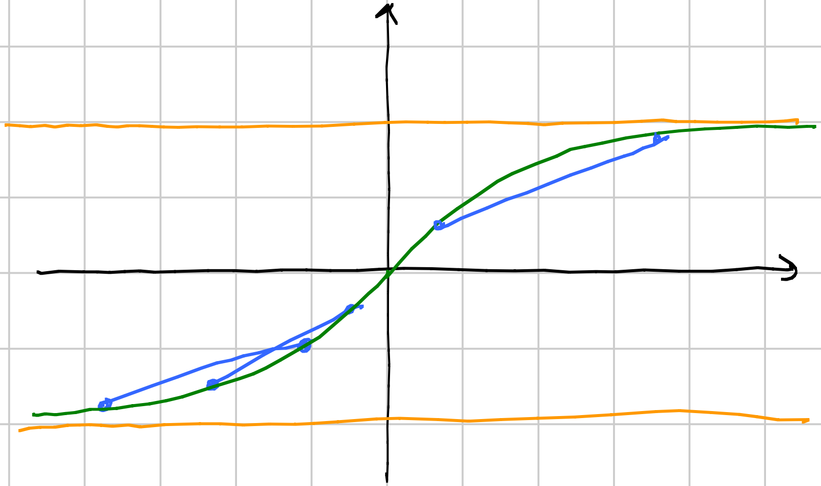
CONCAVA



Esempio 3 $f(x) = \arctan x$

CONVESSA in $x \le 0$

CONCAVA in $x \ge 0$



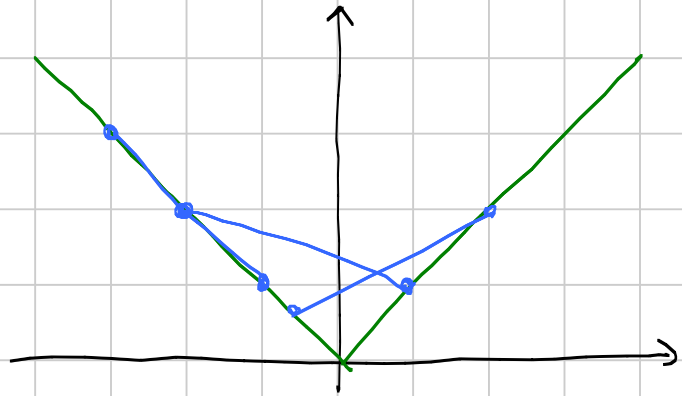
Esempio 4 $f(x) = 2x+3$

SIA CONVESSA

SIA CONCAVA su tutto $\mathbb{R}$. Le rette sono tutte e sole le funzioni che sono sia concave sia convesse

Esempio 5 $\quad f(x) = |x|$

CONVESSA su tutto $\mathbb{R}$.

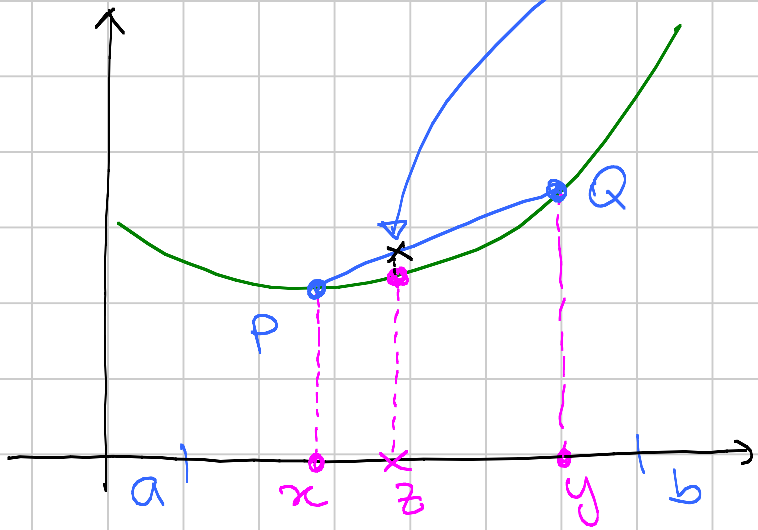


Definizione rigorosa di funzione convessa

$f: (a,b)$ in $\mathbb{R}$ è convessa in (a,b) se

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \boxed{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}$$

$\forall x \in (a,b)$
$\forall y \in (a,b)$
$\forall \lambda \in [0,1]$



$z = \lambda x + (1-\lambda)y$, quando λ varia tra 0 e 1, rappresenta tutti i p.ti del segmento xy

Per esercizio: scrivere l'eq. della retta PQ e calcolarne il valore nel p.to z $\rightsquigarrow$ si ottiene $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Formula con disuguaglianza dice che

$f(z) \leq$ valore retta PQ nel p.to z

cioè funzione $\leq$ segmento

— o — o —

CONVESSITÀ e DERIVATA SECONDA

1° fatto: le funzioni convesse NON sono obbligate ad avere la derivata II, e nemmeno la I
(esempio $f(x) = |x|$)

2° fatto: supponiamo che $f''(x)$ esista per ogni $x \in (a,b)$

Allora $\quad f(x)$ CONVESSA in $(a,b) \iff f''(x) \geq 0$ in (a,b)

" CONCAVA " " $\iff f''(x) \leq 0$ in (a,b)

<u>Estensione</u> : funzioni STRETTAMENTE CONVESSE

" CONCAVE

$f(x)$ STRETT. CONV. in $(a,b) \Leftarrow f''(x) > 0$ in (a,b)

CONCAVA $\Leftarrow f''(x) < 0$ "

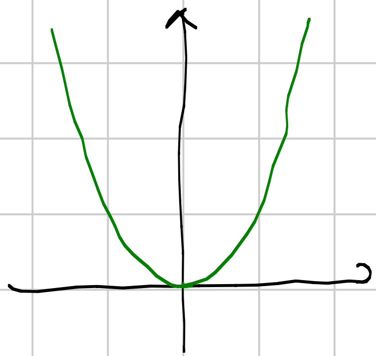
$\boxed{\text{PUNTI DI FLESSO}}$ "Punti in cui una funzione passa da convessa a concava o viceversa"

<u>Oss.</u> ① Se la f'' esiste, nei p.ti di flesso vale 0

② I punti in cui $f''(x) = 0$ sono tutti p.ti di flesso ?

ASSOLUTAMENTE NO

Esempio $f(x) = x^4$



$f'(x) = 4x^3$ $f''(x) = 12x^2$

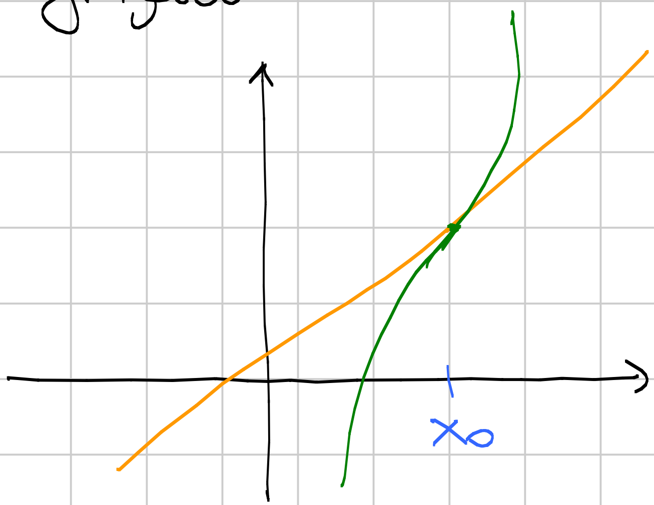
$f''(x) = 0 \iff x = 0$

Ma $x=0$ è un p.to di minimo. $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$. (in realtà strett. convessa)

— o — o —

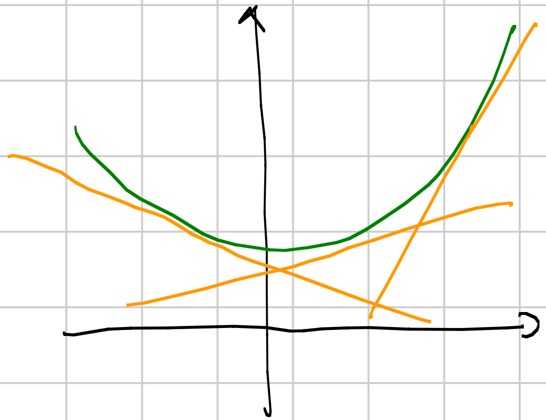
"In un p.to di flesso la retta tangente attraversa il grafico"

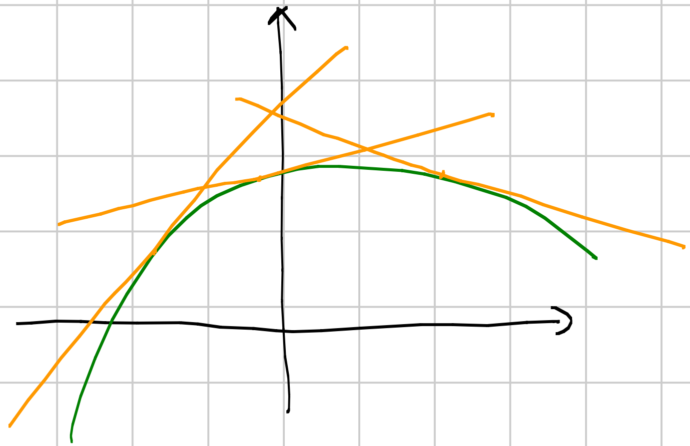


Retta tg. e convessità

* Se una funzione è convessa, allora sta sopra le sue rette tangenti

* se è concava, allora sta sotto le sue rette tangenti





CONVESSITÀ E DERIVATA PRIMA

"

CONVESSA $\iff f'' \geq 0 \iff f'(x)$ debolmente crescente

CONCAVA $\iff f'' \leq 0 \iff f'(x)$ " decrescente

//

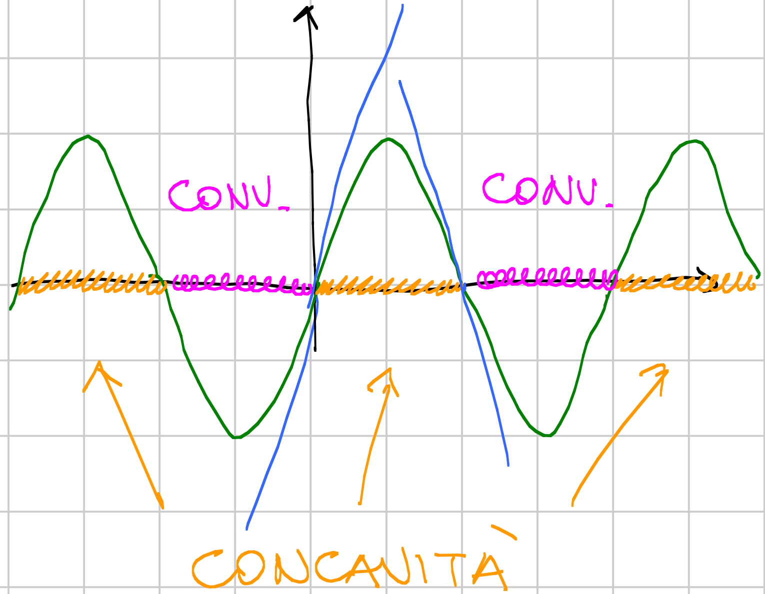
Esempio $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f''(x) \geq 0 \iff -\sin x \geq 0$

$\iff \sin x \leq 0 \iff x \in [\pi, 2\pi]$ e traslati



P.ti di flesso: $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$