MATEMATICA I

ORA 44

Titolo nota 06/11/2007

$\boxed{\text{Monotonia 2}}$ $f: (a,b) \to \mathbb{R}$

↑ anche tutto $\mathbb{R}$ o una semiretta

$f'(x) \geq 0$ in $(a,b) \iff f$ è deb. cresc. in (a,b)

$f'(x) > 0$ in $(a,b) \implies f$ è strett. cresc. in (a,b)

$\boxed{\text{Monotonia 3}}$ $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

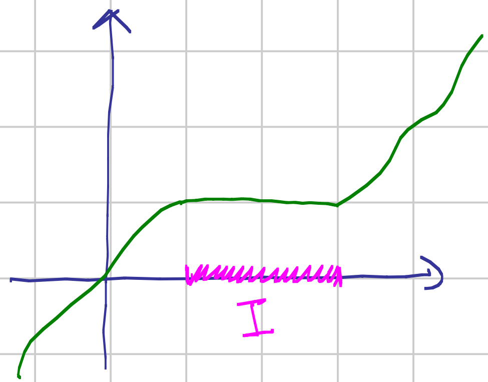
(i) $f'(x) \geq 0$ in (a,b)

(ii) non esiste nessun intervallo $I \subseteq (a,b)$ tale che
$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$ (cioè f' si annulla SPORADICAMENTE)

Allora f è strett. cresc. in (a,b)

Dim. per l'ipotesi (i) f è debolm. cresc. Supponiamo che non sia strett. cresc. Questo vuol dire che il grafico di f ha almeno un tratto piatto

Ma allora ho un intero intervallo I in cui $f'(x) = 0$



— o — o —

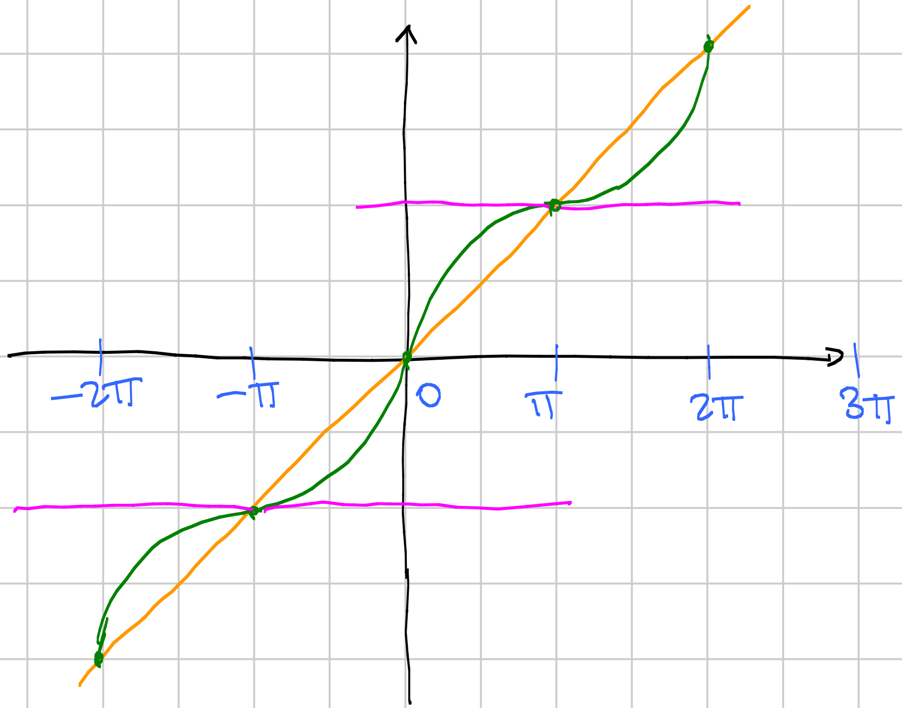
Esempio 1 $\quad f(x) = x + \sin x \qquad f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$

$f'(x) = 0 \iff 1 + \cos x = 0 \iff \cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi$
$k \in \mathbb{Z}$

Quindi $f'(x)$ si annulla SPORADICAMENTE

Monotonia 3 $\Rightarrow$ f è strett. cresc. $\Rightarrow$ f è iniettiva

Visto come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è anche surgettiva (vedi limiti a $\pm\infty$)



i punti $\pi + 2k\pi$ sono stazionari. Di che tipo? Poiché $f'(x) \geq 0$ sempre sono dei p.ti di flesso a tg. orizz. ascendente.

— o — o —

$\boxed{\text{ASINTOTI}}$ → ORIZZONTALI

→ VERTICALI

→ OBLIQUI

ASINTOTO ORIZZONTALE

La retta $y = l$ si dice asint. orizz. per $f(x)$ quando $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

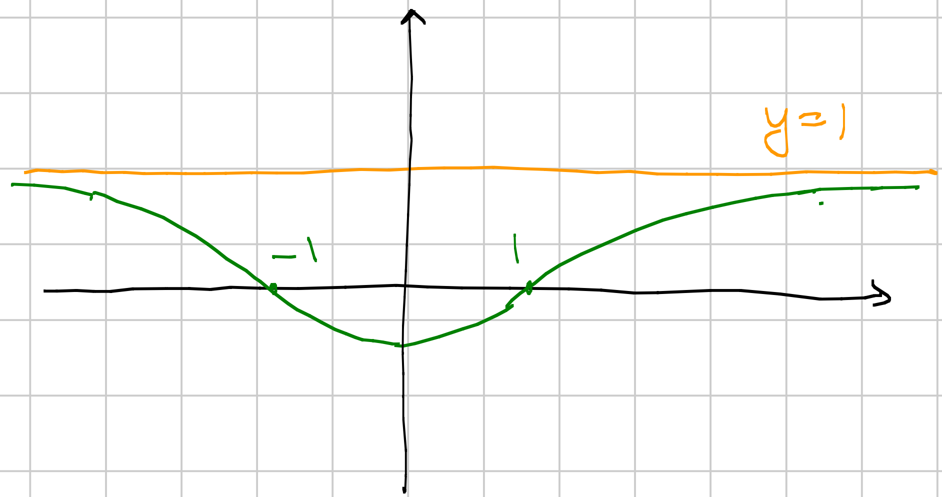
Si dice asintoto orizz. per $x \to -\infty$ se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

Esempio! $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

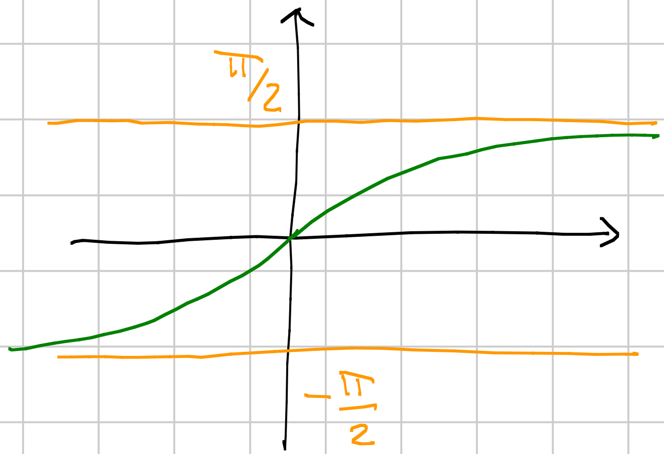
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

Conclusione! la retta $y=1$ è asint. orizz. sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$



Esempio 2 $\quad f(x) = \arctan x$



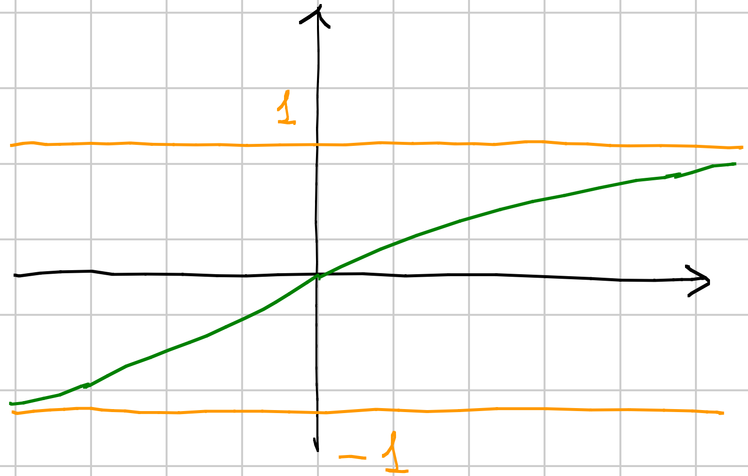
$y = \frac{\pi}{2}$ è asint. orizz. per $x \to +\infty$

$y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizz. per $x \to -\infty$

Esempio 3 $\quad f(x) = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = 1 \qquad y = 1$ as. orizz. per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1 \qquad y = -1$ as. orizz. per $x \to -\infty$



$$f'(x) = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$$

REL. FOND.

ASINTOTI VERTICALI

La retta $x = x_0$ si dice asintoto verticale per $f(x)$ se succede almeno una delle seguenti 4 possibilità

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{"} \quad = -\infty \qquad \text{"} \quad = -\infty$$

Esempio 1 $\quad f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ Il denominatore si annulla per $x = \pm 1$

Candidati ad essere asint. vert.: $x = 1$ e $x = -1$

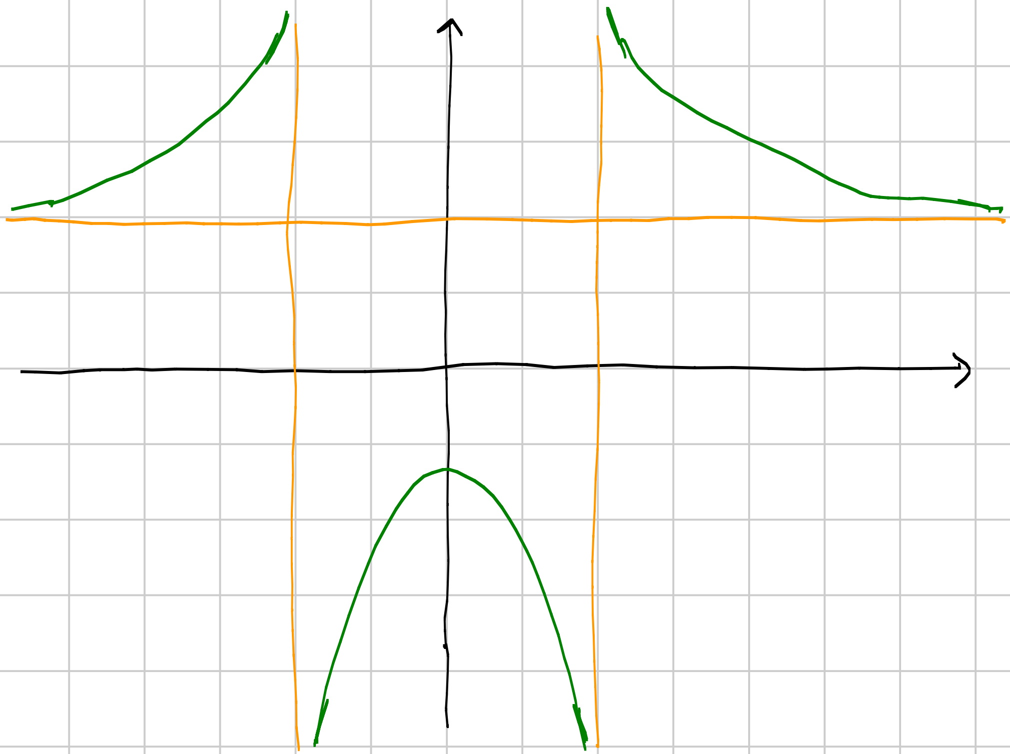
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \text{"}\frac{2}{0^+}\text{"} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \text{"}\frac{2}{0^-}\text{"} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} (x^2-1) = 0^-$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$$

$y = 1$ è asintoto orizz. sia per $x \to +\infty$, sia per $x \to -\infty$



ASINTOTI OBLIQUI

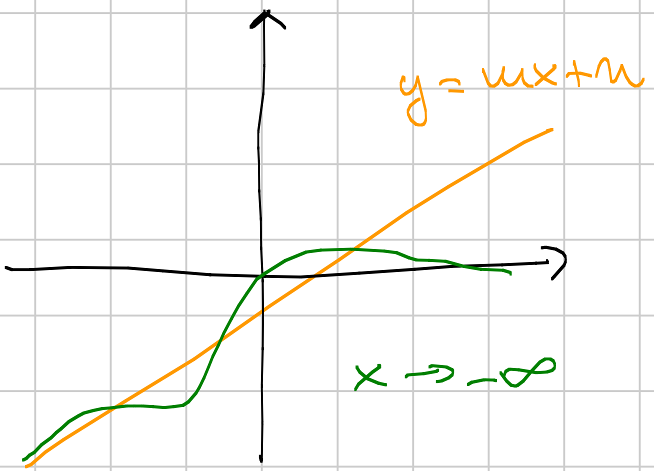
Si dice che la retta $y = mx+n$ è asint. obliquo di $f(x)$ per $x \to +\infty$ se

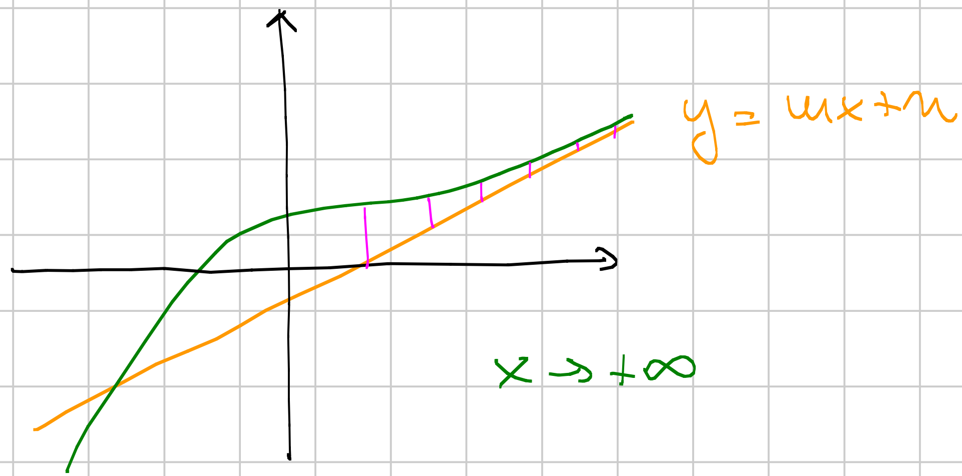
$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = 0$$

Analogamente: $y = mx+n$ è asint. obliquo di $f(x)$ per $x \to -\infty$ se

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = 0$$

Brutalmente: la differenza tra la funzione e la retta tende a 0, cioè la funzione "TENDE ALLA RETTA"





Operativamente: come calcolare m ed n.

La retta $y = mx + n$ è asint. obliquo per $x \to +\infty$ $\Longleftrightarrow$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right)$$

Esempio 1 $\quad f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ $\quad$ Per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}+x}{x-1} = 1 = n$$

La retta $y = x+1$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$

Esempio 2

$$f(x) = 3x + \log x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \log x}{x} = 3 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} (\cancel{3x} + \log x - \cancel{3x}) = +\infty$$

$\Rightarrow$ NO ASINT. OBLIQUO