MATEMATICA I

ORA 40

Titolo nota 30/10/2007

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

= cercare di determinare l'andamento di una funzione nell'intorno di un punto dato

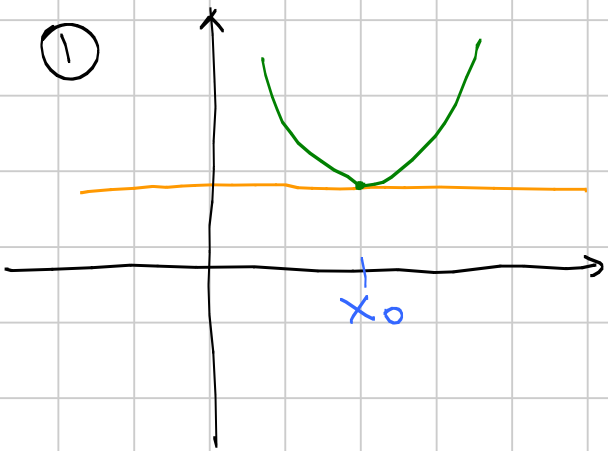
Punto stazionario

Si dice che il punto x_0 è stazionario per una funzione $f(x)$ se $f'(x_0) = 0$

DEFINIZIONE

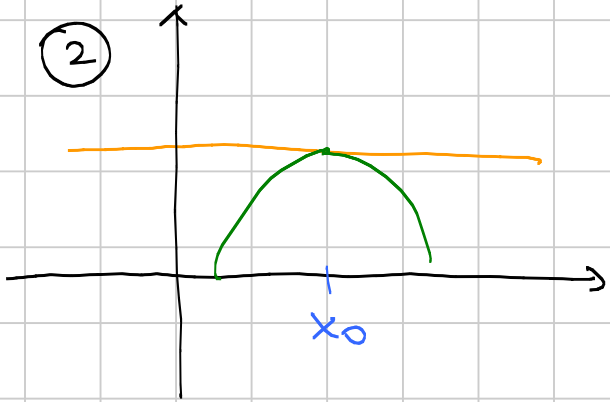
Come può essere il grafico vicino ad un punto stazionario?
Ci sono 5 possibili comportamenti (sempre retta tg. // asse x)

(1)



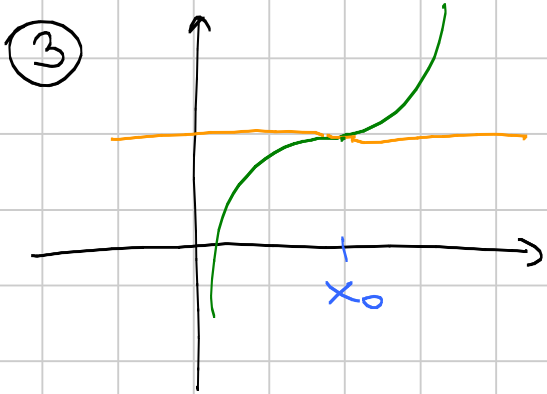
MINIMO LOCALE

(2)



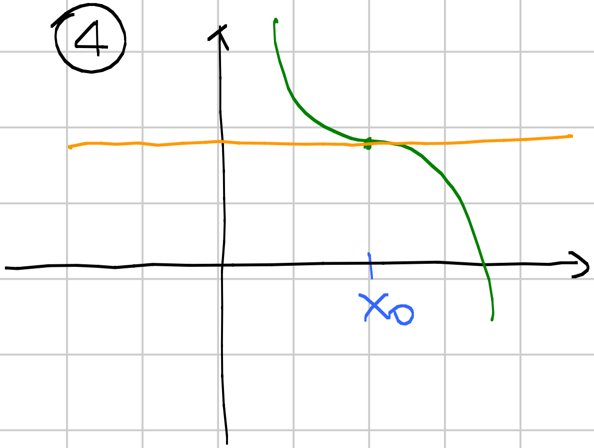
MASSIMO LOCALE

3



FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE CRESCENTE

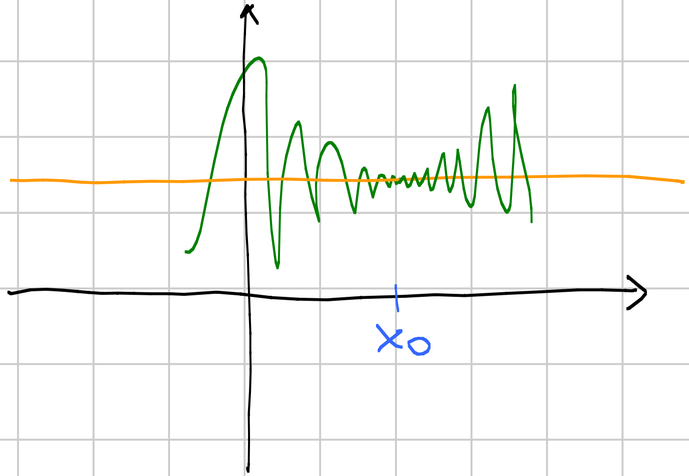
4



FLESSO A TAN. ORIZZ. DECRESCENTE

Valore di f rispetto al punto x_0

	$x < x_0$	$x > x_0$
1	+	+
2	−	−
3	−	+
4	+	−



PATOLOGIE

Data $f(x)$ ed un p.to stazionario x_0, come si stabilisce quale situazione si presenta?

CRITERIO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

Supponiamo $f'(x_0) = 0$ ← punto stazionario

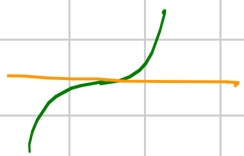
Supponiamo $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

$f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Allora

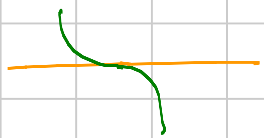
$\boxed{1}$ n pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ MIN. LOC.

$\boxed{2}$ n pari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ MAX. LOC.

$\boxed{3}$ n dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ tipo 3



$\boxed{4}$ n dispari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ tipo 4



<u>Esempio</u> Supponiamo per esemplicità che sia $x_0 = 0$.
Supponiamo che sia $n = 6$.

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(5)}(0) = 0$$

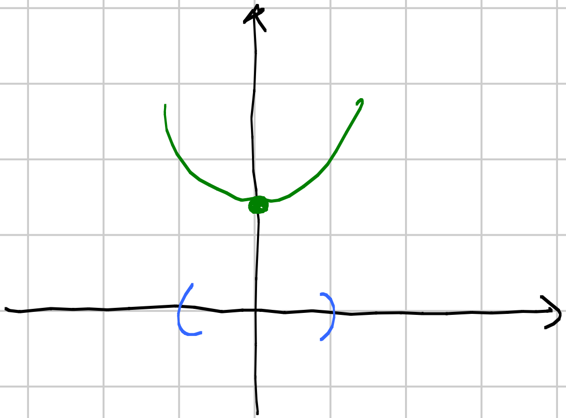
Supponiamo $f^{(6)}(0) = 25 \quad (>0)$

Voglio dedurre che $x=0$ è un punto di min. locale, cioè

$f(x) > f(0)$ per ogni x in un intorno di 0 (escluso lo 0 stesso)

Uso TAYLOR !!!

$$f(x) = P_6(x) + o(x^6) \quad \text{per } x \to 0$$



$$P_6(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$$

Per l'ipotesi avremo che $P_6(x) = f(0) + \frac{25}{6!}x^6$

Quindi sappiamo che

$$f(x) = f(0) + \frac{25}{6!}x^6 + o(x^6)$$ quindi

$$f(x) - f(0) = \frac{25}{6!}x^6 + o(x^6)$$ quindi

$$\underbrace{\boxed{\frac{f(x)-f(0)}{x^6}}}_{\to \frac{25}{6!} > 0} = \frac{25}{6!} + \underbrace{\boxed{\frac{o(x^6)}{x^6}}}_{\to 0}$$

Di conseguenza $\frac{f(x)-f(0)}{x^6} > 0$ in un intorno di 0 (meno lo zero stesso)

Quindi $f(x) - f(0) > 0$ in un intorno di $x=0$, quindi
$f(x) > f(0)$ in un intorno di $x=0$.

Ho usato solo 2 cose: $n=6$ è PARI (per avere denomin. >0) e $f^{(6)}(0)>0$ (per avere limite positivo).

Allo stesso modo si dimostrano i restanti 3 casi

— o — o —

$\boxed{\text{ALTRO MODO DI ENUNCIARE LO STESSO CRITERIO}}$

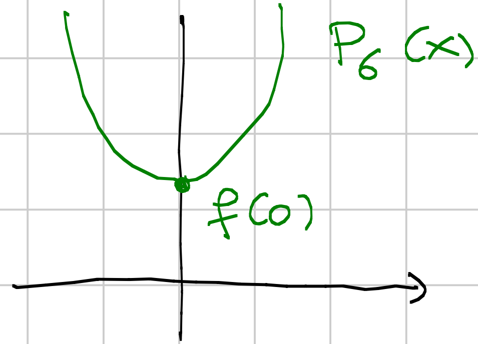
Una funzione $f(x)$ si comporta vicino ad un punto stazionario x_0 come il suo primo polinomio di Taylor non costante.

Nell'esempio precedente ($x_0=0$)

$$P_1(x) = f(0)\,, \qquad P_2(x) = f(0) \quad \leftarrow \text{tutti costanti}$$

$$P_6(x) = f(0) + \frac{25}{6!}x^6 \quad \leftarrow \text{primo pol. di Taylor non costante.}$$

La funzione $f(0) + \frac{25}{61} x^6$



ha un minimo loc in $x=0$, quindi anche la funzione originaria ha un min. loc. in $x=0$.

— o — o —

<u>Esempio 1</u> $f(x) = x^{20} - \sin x^{16}$ $\quad f(0)=0$

Come si comporta vicino ad $x=0$?

$f'(x) = 20x^{19} - \cos x^{16} \cdot 16x^{15}$ quindi $f'(0)=0$

$f(x)$ si comporta come il suo primo pol. di Taylor non costante

$$f(x) = \boxed{-x^{16}} + o(x^{16})$$

primo pol. di Taylor non costante

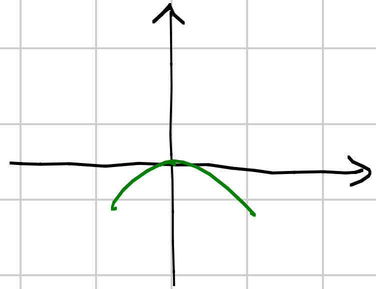
$\sin x^{16} = x^{16} + o(x^{32})$

$\sin x^{16} = x^{16} + o(x^{16})$

si MANGIA x^{20}

$\Rightarrow$ $f(x)$ si comporta come $-x^{16}$

$\Rightarrow$ MASSIMO LOCALE

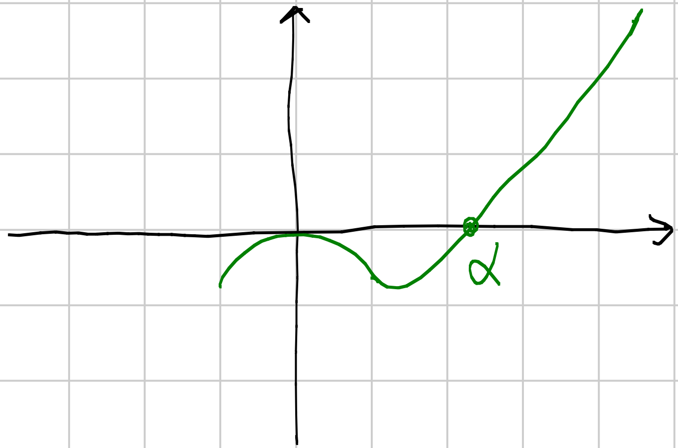


__Esercizio 2__ Dimostrare che l'eq.

$$x^{20} - \sin x^{16} = 0$$ ha almeno 3 soluz. reali

Una soluz. è $x = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\Rightarrow$ c'è almeno una soluzione $x > 0$



f è pari, quindi se $f(\alpha) = 0$, anche $f(-\alpha) = 0$.

Esercizio 3 Supponiamo di calcolare $\boxed{\text{per } x=0}$ le prime 100 derivate della funzione $f(x) = x^{20} - \sin x^{16}$.
Quante vengono $\neq 0$?

Risposta: TAYLOR !!! Calcolo lo sviluppo di Taylor di ordine 100

$$\sin x^{16} = x^{16} - \frac{x^{48}}{6} + \frac{x^{80}}{5!} + o(x^{100})$$

quindi

$$f(x) = x^{20} - x^{16} + \frac{x^{48}}{6} - \frac{x^{80}}{5!} + o(x^{100})$$

$$= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(100)}(0)}{100!}x^{100} + o(x^{100})$$

Quindi le uniche derivate $\neq 0$ per $x=0$ sono quelle di ordine 16, 20, 48, 80.