MATEMATICA I

ORA 36

Titolo nota 25/10/2007

Esempio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^5+5n+25}{n^6-7n+82}}\ a_n$$

1ª possibilità: Leibnitz + disug.

2ª possibilità: $a_n \sim \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ aggiungo e tolgo $\frac{1}{n}$

$$\frac{n^5+5n+25}{n^6-7n+82} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{\cancel{n^6}+5n^2+25n-\cancel{n^6}+7n-82}{n^7-7n^2+82n}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{5n^2+32n-82}{n^7-7n^2+82n}$$

$$\text{Serie iniziale} = \boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n}} + \boxed{\sum (-1)^n \frac{5n^2+32n-82}{n^7-7n^2+82n}} \rightarrow \sim \frac{5}{n^5}$$

CONVERGE x LEIBNITZ

CONVERGE ASSOLUTAMENTE

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{n^{19}+5}{n^{20}+3}}}_{\alpha_n}}_{a_n}$$

Non è piacevole risolvere $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$

$$\sum |a_n| = \sum \frac{n^{19}+5}{n^{20}+3}$$ diverge per C.A. con $b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$ BOH

$$\underbrace{\frac{n^{19}+5}{n^{20}+3} - \frac{1}{n}} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{\cancel{n^{20}} + 5n - \cancel{n^{20}} - 3}{n^{21}+3n}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{5n-3}{n^{21}+3n}$$

$$(-1)^n \frac{n^{19}+5}{n^{20}+3} = (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{5n-3}{n^{21}+3n}$$

$$\sum (-1)^n \frac{n^{19}+5}{n^{20}+3} = \underbrace{\sum (-1)^n \frac{1}{n}}_{\text{CONV. LEIBNITZ}} + \underbrace{\sum (-1)^n \frac{5n-3}{n^{21}+3n}}_{\text{ASSOL. CONV.}}$$

Per studiare la seconda serie utilizzo l'assoluta conv.

$$\sum \frac{5n-3}{n^{21}+3n}$$ Brutale $\sim \frac{1}{n^{20}}$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{20}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{5n-3}{n^{21}+3n}}{\frac{1}{n^{20}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n-3}{n^{21}+3n} \cdot n^{20} = 5 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

$\sum \frac{1}{n^{20}}$ conv. (armonica con $\alpha = 20 > 1$)

$\Downarrow \leftarrow$ confr. asint.

$$\sum \frac{5n-3}{n^{21}+3n} \Longrightarrow \sum (-1)^n \frac{5n-3}{n^{21}+3n}$$

Assol. conv.

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{n^2+7n+\sin n}{n^a+5n-\cos n}}}_{a_n}$ $a_n \geq 0$ (almeno definitiv.)

Per $a>2$ si ha che $a_n \to 0$ $\Rightarrow$ cond. nec. ok $\Rightarrow$ può conv.

Brutale: $a_n \sim \dfrac{n^2}{n^a} = \dfrac{1}{n^{a-2}}$ dunque converge $\Leftrightarrow$ $a-2>1 \Leftrightarrow a>3$

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{n^2+7n+5}{n^a+n^4+12}$ converge sempre perché l'n^4 da solo basta a farla convergere

Esempio 5 $\displaystyle\sum_{n\geq 1}^{\infty} \underbrace{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}_{a_n}$ $a_n \geq 0$

Condiz. necessaria: $a_n \to 1-\cos(0)=0$ Ok.

BRUTALE: $\cos\frac{1}{n} \sim 1-\frac{1}{2n^2}$ $\qquad$ $\cos x \sim 1-\frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

$$1-\cos\frac{1}{n} \sim 1-\left(1-\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} \Rightarrow \text{CONVERGE}$$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

La serie data si comporta come $\sum \frac{1}{n^2}$, dunque conv.

— o — o —

<u>Esempio 6</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ per quali α converge?

Brutale: $\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \sim \left(\frac{1}{2n^2}\right)^{\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha}} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}}$

Converge $\Leftrightarrow$ $2\alpha > 1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha > \frac{1}{2}$

Esempio 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{12} - 1 \right)$$

$a_n \geq 0$

$a_n \to 0$ cond. nec. ok

Brutale $\sqrt[n]{12} - 1 \sim e^{\frac{1}{n}\log 12} - 1$ $\qquad e^x \sim 1+x$

$$\sim \cancel{1} + \frac{1}{n}\log 12 - \cancel{1} = \frac{1}{n}\log 12$$

$\Rightarrow$ DIVERGE $\qquad$ Rigoroso: confronto asint. con $b_n = \frac{1}{n}$

— o — o —

Esempio 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n^2+7} \right) \right]^{\alpha}$$

$\sin x \sim x$

Brutale: $\left[\sin\left(\frac{1}{n^2+7} \right) \right]^{\alpha} \sim \left[\sin \frac{1}{n^2} \right]^{\alpha} \sim \left[\frac{1}{n^2} \right]^{\alpha} = \frac{1}{n^{2\alpha}}$

converge $\iff 2\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}$

Esempio 9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2+7}\right)$

Assoluta convergenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2+7}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\sin\left(\frac{1}{n^2+7}\right)}^{\text{sempre } \geq 0}$$

converge per C.A. con $\frac{1}{n^3}$

$\sum |a_n|$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ converge

— o —

Esempio 10 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{12^n + 40^n}{41^n + 11^n}$

Brutale: $\sim \dfrac{40^n}{41^n} = \left(\dfrac{40}{41}\right)^n$

converge perché geometrica con "ragione" < 1

Rigoroso, C.A. con $\left(\frac{40}{41}\right)^n$

oppure radice

Esempio 11

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n + n! + 8^n}{80^n + (2n)!}$$

Brutale : $\sim \frac{n!}{(2n)!}$

1° passaggio : confronto asint. con $b_n = \frac{n!}{(2n)!}$

Studio $\sum \underbrace{\boxed{\frac{(n!)}{(2n)!}}}_{b_n}$ con il rapporto

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(n+1)\,\cancel{n!}}{(2n+2)(2n+1)\,\cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{n!}} \to 0$$

$0 < 1 \Rightarrow$ converge.