MATEMATICA I

$\boxed{\text{ORA 33}}$

Titolo nota 24/10/2007

$\boxed{\text{Serie geometrica}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ Si trova la formula per le somme parziali s_k

$$s_k = 1 + a + a^2 + \dots + a^k = \frac{a^{k+1} - 1}{a-1} \quad (\text{se } a \neq 1)$$

Dimostrata a suo tempo per induzione

Se $\boxed{a > 1}$ $s_k = \frac{a^{k+1}-1}{a-1} \to +\infty$

Se $\boxed{-1 < a < 1}$ allora $a^{k+1} \to 0$ e quindi

$$s_k \to \frac{0-1}{a-1} = \frac{1}{1-a} \quad (\text{la serie converge})$$

Se $\boxed{a = -1}$

$$s_k = \frac{(-1)^{k+1} - 1}{-2} = \begin{cases} \nearrow \dfrac{-2}{-2} = 1 & k \text{ pari} \\ \searrow \dfrac{0}{-2} = 0 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$s_k = 1, 0, 1, 0, 1, 0$ $\rightsquigarrow$ non ha limite

Se $\boxed{a < -1}$ $\quad a^{k+1}$ $\longrightarrow +\infty$ sui k dispari

$\searrow -\infty$ sui k pari

quindi s_k non ha limite (serie indeterminata)

Se $\boxed{a = 1}$ non posso usare la formula precedente per calcolare s_k.

In questo caso $s_k = 1 + a + \dots + a^k = 1 + 1 + \dots + 1 = k+1$

quindi $s_k \to +\infty$ in questo caso

$\boxed{\text{Dim. CONFRONTO}}$ Ipotesi $a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$S_k^{(a)} = a_0 + a_1 + \dots + a_k \; ; \quad S_k^{(b)} = b_0 + b_1 + \dots + b_k$$

$$S_k^{(a)} \le S_k^{(b)} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}$$

$$\sum a_n = +\infty \underset{\text{definiz.}}{\Longrightarrow} S_k^{(a)} \to +\infty \underset{\text{confronto a 2 sui limiti}}{\Longrightarrow} S_k^{(b)} \to +\infty$$

$$\Downarrow \text{ definiz.}$$

$$\sum b_n = +\infty$$

— o —

$\sum b_n$ converga $\underset{\text{definiz.}}{\Longrightarrow}$ $S_k^{(b)} \to \ell \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ è impossibile che $S_k^{(a)} \to +\infty$

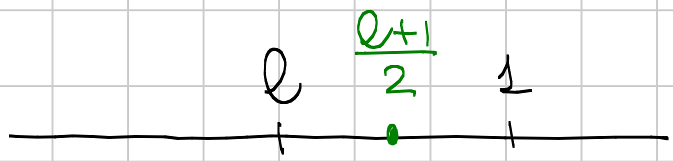
$\Longrightarrow$ è impossibile che $\sum a_n = +\infty$ $\Longrightarrow$ (trattandosi di una serie a termini ≥ 0) l'unica possibilità è che converga

— o — o —

DIM. RADICE $\quad \sqrt[n]{a_n} \to \ell$

<u>1° caso</u>: $\ell > 1$. Poichè $\sqrt[n]{a_n} \to \ell > 1$, allora (criterio della radice applicato ai limiti) $a_n \to +\infty$, ma allora la condiz. nec. non è verificata $\Rightarrow$ la serie non converge $\Rightarrow$ (essendo a termini ≥ 0) diverge a $+\infty$.

<u>2° caso</u> $0 \leq \ell < 1$. Poichè $\sqrt[n]{a_n} \to \ell < 1$, allora $a_n \to 0$ quindi la condiz. nec. è verificata, quindi la serie può convergere



Poichè $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, allora definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\ell+1}{2}, \quad \text{cioè} \quad a_n \leq \underbrace{\boxed{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}}_{b_n}$$

$\sum b_n$ è una geometrica con parametro $\frac{\ell+1}{2} < 1$ $(\ell > 0)$

$\sum b_n$ converge, quindi $\sum a_n$ (che è a termini ≥ 0)

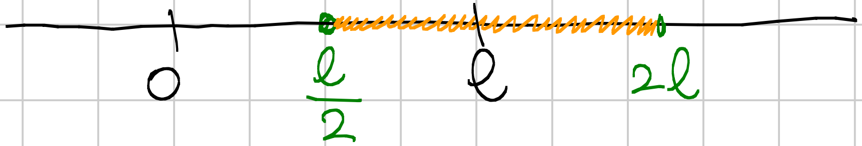
converge.

— o — o —

DIM. CONFRONTO ASINTOTICO STANDARD

Ipotesi $\quad \frac{a_n}{b_n} \to \ell \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$ (quindi >0 perché $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$)

Poiché $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$, allora



definitivamente

$$\frac{\ell}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2\ell$$

Poiché $b_n > 0$ moltiplico e ottengo

$$\frac{\ell}{2} b_n \leq a_n \leq (2\ell) \cdot b_n$$

<u>1° caso</u> Supponiamo che $\sum b_n = +\infty$, allora ovviamente

$\frac{\ell}{2} \sum b_n = +\infty$, e quindi (per la disug. di SINISTRA)

anche $\sum a_n = +\infty$ (per il confronto tra serie)

<u>2° caso</u> Supponiamo che $\sum b_n$ converga. Allora

$\sum (2\ell) b_n$ converge, quindi (disug. di DESTRA)

anche $\sum a_n$ converge (per confronto tra serie).

— o — o —

$\boxed{\text{CASI LIMITE DI CONFRONTO ASINTOTICO}}$ $a_n \geq 0$, $b_n > 0$

Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \to 0$. Allora definitivamente

$\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, cioè $a_n \leq b_n$, quindi

$\sum b_n = +\infty \Rightarrow$ BOH

$\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

Supponiamo invece che $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$.

Allora definitivamente $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, cioè $a_n \geq b_n$, quindi

$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

$\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ BOH

— o — o —

$\boxed{\text{Osservazione sui limiti}}$ Supponiamo $a_n \boxed{>} b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}} \\ b_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \text{Allora } \boxed{\ell_1 > \ell_2}$$

NO!!!!!!

SOLO $\ell_1 \geq \ell_2$

Esempio $a_n = \frac{327}{n}$ $\quad b_n = \frac{1}{n}$ $\quad a_n > b_n \quad \forall n \geq 1$

$a_n \to 0 \qquad b_n \to 0$

LE DISUGUAGLIANZE STRETTE NON PASSANO AL LIMITE

— o — o —

Torniamo alle serie....

① $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ $\quad a_n \geq 0$. Uso criterio rapporto $(a_n > 0)$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

Radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\boxed{\sqrt[n]{n^2}}}{2} \to \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

$\to 1$ $\quad \left(\sqrt[n]{\text{polinomio}} \to 1 \right)$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad a_n > 0$$

<u>Radice</u>: $\sqrt[n]{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e > 1 \Rightarrow$ diverge

Alternativa: controllare la condizione necessaria

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!} \qquad a_n > 0$$

<u>Rapporto</u>: $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2\, 2^{\cancel{n+1}}}{\underset{(n+1)\,\cancel{n!}}{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^2\, \cancel{2^n}} = \boxed{\underset{\to 1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}} \cdot \boxed{\underset{\to 0}{\frac{2}{n+1}}} \to 0$$

$0 < 1 \Rightarrow$ la serie converge.

$\sqrt[n]{n^2} \to 1$, $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$

<u>Radice</u>: $$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2}\cdot 2}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 \Rightarrow$$ la serie converge.