MATEMATICA I

ORA 28

Titolo nota 19/10/2007

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

coseno iperbolico

$$\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

Simmetrie

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh x \qquad \text{PARI} \qquad \cosh 0 = 1$$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\sinh x \qquad \text{DISPARI} \qquad \sinh 0 = 0$$

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x) \qquad \text{DISPARI}$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2-(e^{-x})^2}{2} =$$

$$= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{e^x+e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x-e^{-x}}{2} = 2\cosh x \cdot \sinh x$$

Per esercizio: trovare la formula per $\cosh(2x)$

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$ Relazione fondamentale

<u>Sviluppi di Taylor</u> (Fare per esercizio calcolando le derivate successive)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \cancel{\frac{x^5}{5!}} + \dots$$

$$+ 1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} - \cancel{\frac{x^5}{5!}} + \dots \Big)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Termini di grado pari nello sviluppo di e^x (come lo sviluppo di $\cos x$, soltanto con tutti +)

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

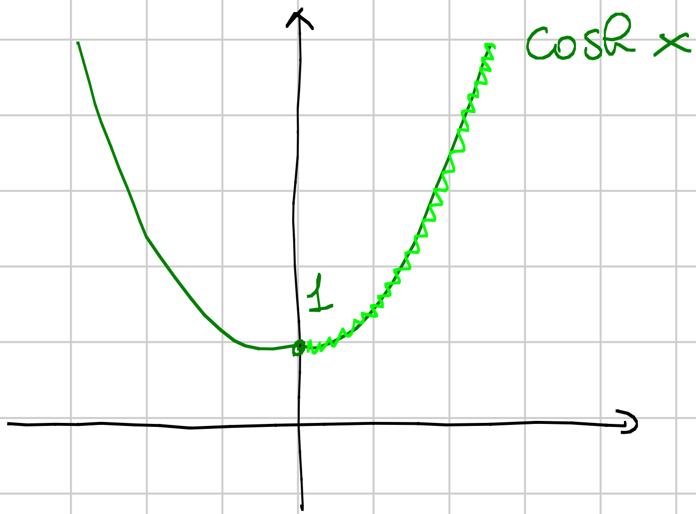
termini di grado dispari di e^x

Nota bene: $\cosh x + \sinh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$

Grafico di $\cosh x$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$ è una funzione crescente per $x \geq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty$$



Vista come funzione

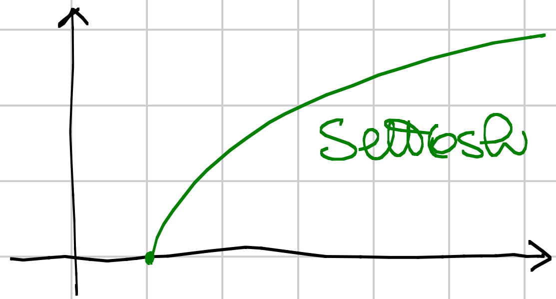
$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to [1, +\infty)$$

è iniettiva e surgettiva, dunque invertibile. L'inversa è una funzione

$$g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$ detta

$$g(x) = \text{Settcosh}\, x$$

↑ Settore



Formula per $\mathrm{Settcosh}\, x$

$\cosh x = y$ ⇝ ricavare x in funzione di y

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \; ; \qquad e^x + e^{-x} = 2y$$

Pongo $z = e^x$ $\qquad z + \frac{1}{z} = 2y \qquad z^2 - 2yz + 1 = 0$

eq. di 2° grado in z

$$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Prendo $z = y + \sqrt{y^2-1}$

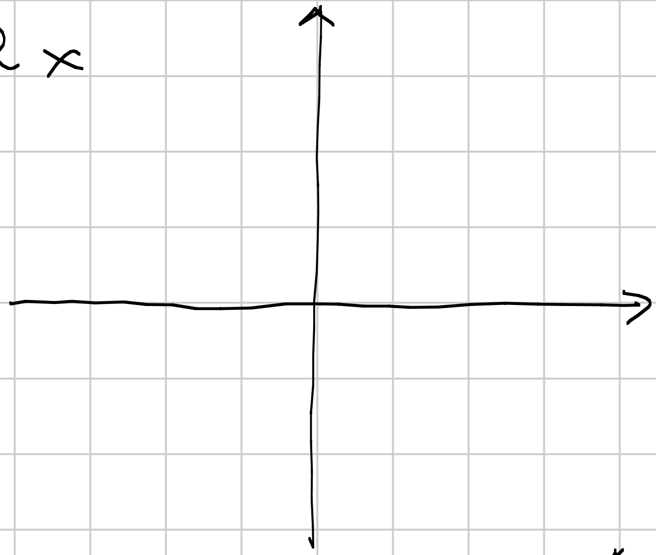
per essere la sol. nel "ramo destro" del grafi

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1} \longrightarrow x = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

$$= \mathrm{Settcosh}\, y$$

Per esercizio $\rightsquigarrow$ ricavare la formula per settsinh x

sinh x

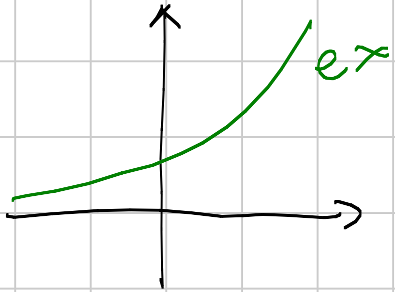


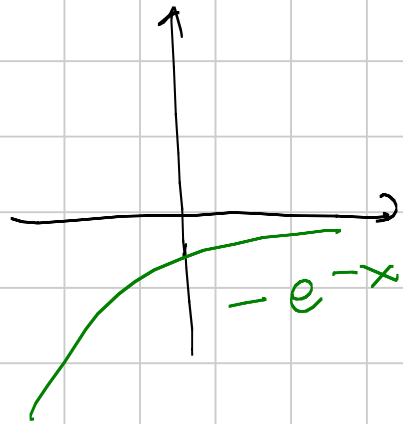
$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

e^x funzione crescente

e^{-x} funzione decrescente

$-e^{-x}$ funzione crescente

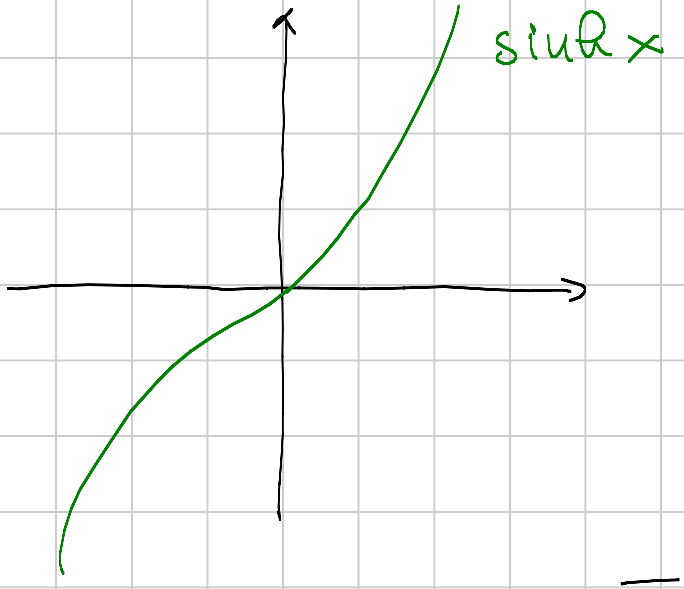




$\sinh x$ = somma di 2 funzioni cresc.

= funzione crescente

$$\lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty$$



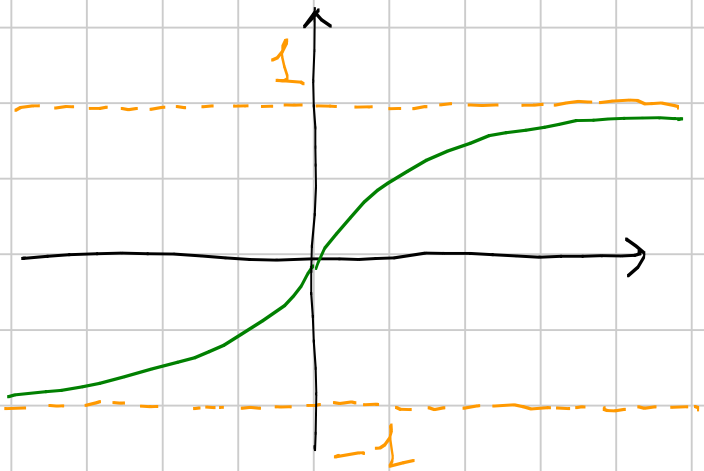
Vista come funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile.

La sua inversa è $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ detta

$$g(x) = \text{Sett}\sinh x$$

— o — o —

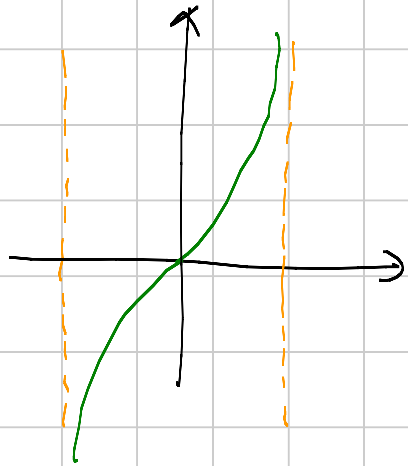
$\tanh x \rightsquigarrow$ (verificare quando avremo fatto i grafici di funzione)

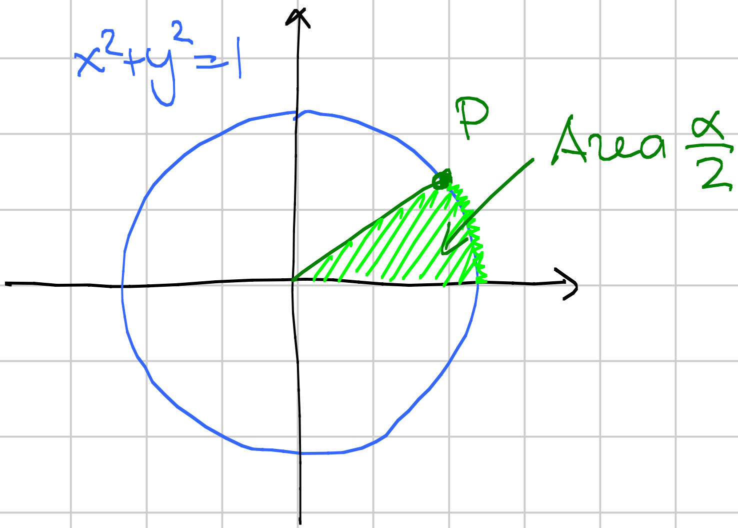


L'inversa è

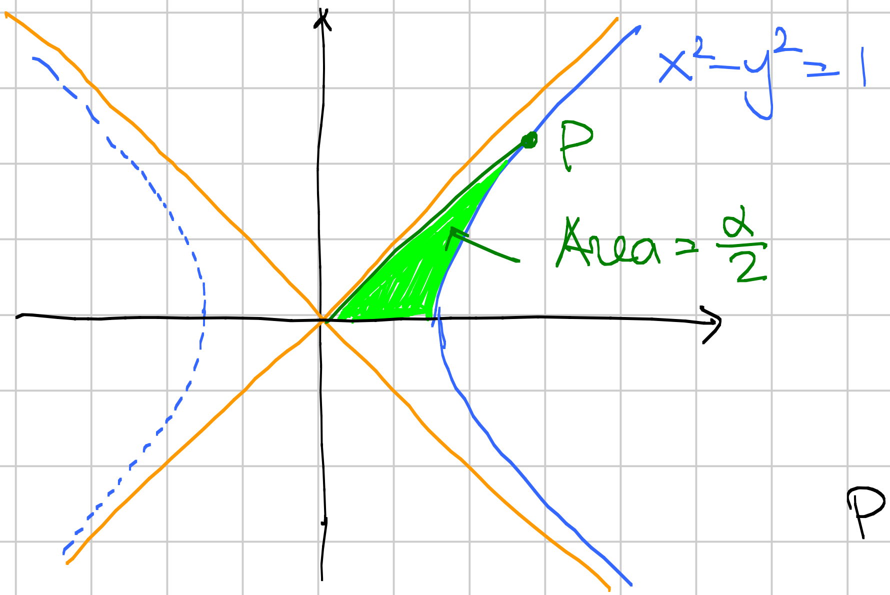
$$g(x) = \text{Sett}\tanh x$$

$$g: (-1,1) \to \mathbb{R}$$





$P(\cos\alpha, \sin\alpha)$



Fissato $\alpha\in\mathbb{R}$, cerco un punto P sull'iperbole in modo che l'area del settore sia $\frac{\alpha}{2}$

Allora $P=(\cosh\alpha, \sinh\alpha)$

P sta sull'iperbole $\Rightarrow \cosh^2\alpha-\sinh^2\alpha=1$

Un filo della luce sospeso tra 2 pali

si dispone secondo un tratto del grafico di $\cosh x$.