MATEMATICA I

ORA 26

Titolo nota 18/10/2007

DERIVATE SUCCESSIVE

$f(x) \rightsquigarrow f'(x) \rightsquigarrow f''(x) =$ derivata della derivata

Notazioni:

$$\frac{df}{dx} \qquad f'(x) \qquad \dot{f}(x)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} \qquad f''(x) \qquad \ddot{f}(x)$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} \qquad f'''(x) \qquad \text{BASTA}$$

$$\frac{d^4f}{dx^4} \qquad f^{IV}(x)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{2007}f}{dx^{2007}} \qquad f^{(2007)}(x) = \text{derivata 2007-esima}$$

Teorema di De L'Hôpital

Supponiamo di dover calcolare $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad (x_0 \in \overline{\mathbb{R}})$

Supponiamo 3 cose:

1) un po' di burocrazia
   - $g \neq 0$ in un intorno di x_0 (tranne x_0)
   - $g' \neq 0$ " " "
   - f' e g' devono esistere

2) il limite sia del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esista e $\in \overline{\mathbb{R}}$ (escludo solo il caso 4)

Tesi
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Operativamente. Devo calcolare il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$. Se questo viene del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ provo a calcolare il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Se questo esiste ho finito. Se è ancora $\frac{0}{0}$ opp $\frac{\infty}{\infty}$ vado avanti calcolando il limite di $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ e così via.

— o — o —

ACHTUNG 1 $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} \underset{\uparrow \text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$

NOOO!!! Il limite iniziale non era $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$

ACHTUNG 2 $\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} \underset{\uparrow \text{H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{1} = \text{N.E.}$

NOOO!!! Se il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste NON SI PUÒ CONCLUDERE NULLA

Esempio 1 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) x$ $\qquad 0 \cdot +\infty$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\frac{\pi}{2} - \arctan x}^{f(x)}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)}} =$$

$\frac{0}{0} \Rightarrow$ posso applicare Hôp.

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

Esempio 2 $\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right) =$

uso criterio funzioni $\Rightarrow$ succ.

$x = n$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$$

Esempio 3 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\sin x)}{\log x}$ $\frac{-\infty}{-\infty}$ posso applicare Hôpital

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}\cdot \cos x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \overset{1}{\boxed{\cos x}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{x}{\sin x}}}_{1} \to 1$$

Esempio 4 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^4}{x^3+x^4}$

In maniera elementare:

$$\frac{\sin x - x + x^4}{x^3+x^4} = \frac{\cancel{x}\left(\overset{1}{\boxed{\frac{\sin x}{x}}} - 1 + x^3\right)}{\cancel{x}(x^2+x^3)} = \frac{x^3}{x^2+x^3} =$$

Ho fatto il limite SOLO su un pezzo!!!

$$= \frac{\cancel{x^2}\cdot x}{\cancel{x^2}(1+x)} = \frac{x}{1+x} \to 0$$

NON SI FANNO I LIMITI METÀ PER VOLTA

Con Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^4}{x^3+x^4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + 4x^3}{3x^2+4x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x + 12x^2}{6x+12x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x + 24x}{6+24x} = -\frac{1}{6}$$

Esempio 5 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\cos x+3}{2x^2-4} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}$ $[x^2+\cos x+3 \geq x^2]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sin x}{4x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\cos x}{4} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos x}{4}\right)$$

$= N.E.$

$\Rightarrow$ Non si può dire nulla

$$\frac{\cancel{x^2}\left(1+\boxed{\frac{\cos x}{x^2}}+\boxed{\frac{3}{x^2}}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\boxed{\frac{4}{x^2}}\right)} \to \frac{1}{2}$$

FORMULA DI TAYLOR

Data una funzione $f(x)$, sotto certe ipotesi per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$f(x)$ deve avere almeno n derivate in $x=0$

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0}$$

Posso approssimare $f(x)$ vicino a zero con il polinomio $P_n(x)$ commettendo un errore che è $o(x^n)$

Inoltre $P_n(x)$ è dato dalla seguente formula

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

Polinomio di Taylor di $f(x)$ di ordine n

SVILUPPI DI TAYLOR

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4$$

Caso particolare: $\boxed{\alpha = -1}$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$$