MATEMATICA I

ORA 21

Titolo nota 16/10/2007

o piccolo

Def. Siano $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si dice che $\boxed{f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0}$ se

esiste una funzione $\omega(x)$ tale che

$$f(x) = \omega(x) \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$$

Brutalmente: $f(x) = g(x) \cdot$ qualcosa che tende a 0 per $x \to x_0$

Def quasi equivalente. Supponendo di poter dividere per $g(x)$ (cosa che si può fare se $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 meno il punto x_0 stesso) si ha che

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \text{se}$$

$$\lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{f(x)}{g(x)}} = 0$$

$\nwarrow \omega(x)$

Brutalmente: supponendo che $f(x)$ e $g(x)$ tendano a 0 per $x \to x_0$, il limite sarebbe una forma indet. $\frac{0}{0}$ e $f(x) = o(g(x))$ vuol dire

che "f batte g" oppure "f tende a 0 più veloc. di g."!

Esempio 1 $\quad x^2 = o(x)$ per $x \to 0$

$f(x) = x^2$
$g(x) = x$
$x_0 = 0$

$$\underset{f(x)}{x^2} = \underset{\omega(x)}{x} \cdot \underset{g(x)}{x}$$

Da controllare $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$

Esempio 2 $\quad \sin^3 x = o(x^2)$ per $x \to 0$

$f(x) = \sin^3 x$
$g(x) = x^2$
$x_0 = 0$

Def. ufficiale: $\underset{f(x)}{\sin^3 x} = \underset{\omega(x)}{\frac{\sin^3 x}{x^2}} \cdot \underset{g(x)}{x^2}$

Da controllare: $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{x^2} =$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\sin^3 x}{x^3}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\to 0} = 0$$

Def. quasi equivalente:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^2} = 0 \quad \text{(stesso motivo)}$$

Esempio 3

$$\frac{1}{x^4} = o\left(\frac{1}{x^{20}}\right) \quad \text{per } x \to 0$$

$f(x) = \frac{1}{x^4}$

$g(x) = \frac{1}{x^{20}}$

$x_0 = 0$

Def. q.e.:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^{20}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\cdot x^{20} = \lim_{x\to 0} x^{16} = 0$$

In questo esempio $f(x)$ e $g(x)$ NON tendono a zero per $x \to x_0 = 0$

Def. uff.

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{x^4}}}_{f(x)} = \underbrace{\boxed{x^{16}}}_{\omega(x)} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{x^{20}}}}_{g(x)}$$

Proprietà di o piccolo

$$\boxed{o(g) + o(g) = o(g)}$$

Supp. $f_1(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

$f_2(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

Allora $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

Dim. $f_1(x) = \omega_1(x) \cdot g(x)$ $\lim_{x \to x_0} \omega_1(x) = 0$

$f_2(x) = \omega_2(x) \cdot g(x)$ $\lim_{x \to x_0} \omega_2(x) = 0$

Sommando:

$$f_1(x) + f_2(x) = \underbrace{\boxed{(\omega_1(x) + \omega_2(x))}}_{\omega_3(x)} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \to x_0} (\omega_1(x) + \omega_2(x)) = 0 \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g)$$

2ª proprietà : $\boxed{o(g) - o(g) = o(g)}$

Dim. si arriva a

$$f_1(x) - f_2(x) = \underbrace{\boxed{\left(\omega_1(x) - \omega_2(x)\right)}}_{\omega_3(x)} \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega_3(x) = \dots = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 - f_2 = o(g)$$

3ª proprietà Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che $\boxed{\lambda\, o(g) = o(g)}$

Detto per bene: se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, allora

$$\lambda f(x) = o(g(x))$$

Dim. $f(x) = \omega(x) \cdot g(x)$ con $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$

$$\lambda f(x) = \underbrace{\boxed{\lambda \omega(x)}}_{\omega_1(x)} \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega_1(x) = \lim_{x \to x_0} \lambda \omega(x) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda f = o(g)$$

— o — o —

4ª proprietà $\boxed{o(\lambda g) = o(g)}$

Dim. $f(x) = o(\lambda g(x))$, cioè

$$f(x) = \underbrace{\boxed{\omega(x) \cdot \lambda}}_{\omega_1(x)} g(x) = \omega_1(x) \cdot g(x)$$

$\omega_1(x) \to 0$ (come sopra)

Esempio $o(7x) = o(x)$

$\boxed{5^a \text{ proprietà}}$ $\boxed{o(g)\cdot o(g) = o(g^2)}$

$$f_1(x) = \omega_1(x)\cdot g(x) \qquad \lim_{x\to x_0} \omega_1(x) = 0$$

$$f_2(x) = \omega_2(x)\cdot g(x) \qquad \lim_{x\to x_0} \omega_2(x) = 0$$

$$f_1(x)\cdot f_2(x) = \underbrace{\boxed{\omega_1(x)\cdot\omega_2(x)}}_{\omega_3(x)}\cdot g^2(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \omega_3(x) = \lim_{x\to x_0} [\omega_1(x)\cdot\omega_2(x)] = 0 \Rightarrow f_1\cdot f_2 = o(g^2)$$

— o — o —

6ª "proprietà" $\dfrac{o(g)}{o(g)}$ = NULLA DI FURBO!!

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\omega_1(x)\cdot \cancel{g(x)}}{\omega_2(x)\cdot\cancel{g(x)}} = \frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} \to \frac{0}{0}$$

Forma indeterminata

Esempi   Per $x \to \boxed{0}$ $f(x) = o(x^2) \Rightarrow f(x) = o(x)$

$f(x) = o(x^2) \Rightarrow f(x) = x^2 \cdot \omega(x)$ $\lim_{x \to 0} \omega(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = \underbrace{\boxed{x \cdot \omega(x)}}_{\omega_1(x)} \cdot x$

$\lim_{x \to 0} \omega_1(x) = \lim_{x \to 0} [x \cdot \omega(x)] = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f(x) = o(g)$

— o — o —

7ª proprietà: transitività

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = o(g(x)) \\ g(x) = o(h(x)) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = o(h(x))$$

Dim. $f(x) = \omega_1(x) \cdot g(x)$, $g(x) = \omega_2(x) \cdot h(x)$

$\Rightarrow f(x) = \underbrace{\boxed{\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}}_{\shortparallel \ \omega_3(x)} \cdot h(x)$

$\boxed{o(o(h)) = o(h)}$

$\lim_{x \to x_0} \omega_3(x) = 0 \cdot 0 = 0$

Nell' esempio precedente $(x_0 = 0)$

$$f(x) = o(x^2), \quad x^2 = o(x) \implies f(x) = o(x)$$

per $x \to 0$

Esempio $\underbrace{x^2 + \tan^2 x + \sin x^3}_{f(x)} = o(x)$ $\quad g(x) = x$, $x_0 = 0$

Def. quasi equivalente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \tan^2 x + \sin x^3}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(x + \frac{\tan^2 x}{x} + \frac{\sin x^3}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\boxed{x}}_{0} + \underbrace{\boxed{\frac{\tan^2 x}{x^2}}}_{1} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{0} + \underbrace{\boxed{\frac{\sin x^3}{x^3}}}_{1} \cdot \underbrace{\boxed{x^2}}_{0} \right) = 0$$