MATEMATICA I

$\boxed{\text{ORA 19}}$

Titolo nota 12/10/2007

Uso di sottosuccessioni → strumenti per dimostrare che un limite non esiste

$\boxed{\text{SOTTOSUCCESSIONE}}$ $\boxed{a_0}, \boxed{a_1}, a_2, a_3, \boxed{a_4}, a_5, \boxed{a_6}, \dots$

Prendere solo "alcuni" termini di una successione

a_{2n} = sottosuccessione dei termini di indice pari

a_{2n+1} = " " " " " dispari

a_{n^2} = " $a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16}, a_{25}, \dots$

$a_{4n+1} = a_1, a_5, a_9, a_{13}, \dots$

2 definizioni in commercio

→ $\boxed{\text{pescare in modo strettamente crescente}}$

→ pescare in modo che gli indici tendano a $+\infty$

In generale una sottosuccessione di a_n si indica con

$$a_{\boxed{n_k}}$$ → n_k è la successione degli indici che sto pescando, ad esempio

$2k$, $2k+1$, k^2, $4k+1$

— o — o —

Legame tra il limite di una succ. ed il limite di una s.succ.

<u>Teorema</u> Se $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora ogni sua s.succ.

a_{n_k} tende allo stesso l.

<u>Utilizzo operativo</u> Sia data una successione a_n.
Supponiamo che esistano

* una sottosucc. b_n t.c. $b_n \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$
* " " c_n " $c_n \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

$l_1 \neq l_2$

Allora il limite di a_n non esiste (cioè a_n è di tipo 4)

Infatti, se per assurdo $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora tutte le sottosuccessioni dovrebbero tendere allo stesso l.

<u>Esempio 1</u> $a_n = (-1)^n$ $\quad 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$

$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \to -1$

Sono 2 sottosucc. con 2 limiti diversi
$\Downarrow$
il limite di a_n non esiste

Esempio 2 $a_n = n^3 + (-1)^n n^4$

$$a_{2n} = (2n)^3 + (-1)^{2n}(2n)^4 = 8n^3 + 16n^4 \longrightarrow +\infty$$

$$a_{2n+1} = (2n+1)^3 + (-1)^{2n+1}(2n+1)^4$$

$$= (2n+1)^3 - (2n+1)^4 \longrightarrow -\infty$$

Ho 2 sottosucc. con limite diverso $\Rightarrow$ il limite iniziale N.E.

— o — o —

Esempio 3 $a_n = n^4 + (-1)^n n^3$

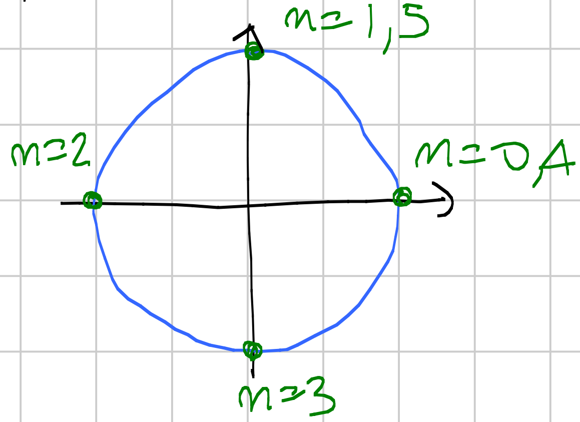
$$\underbrace{\boxed{n^4 + (-1)^n n^3}}_{\Downarrow\ +\infty} \geq \underbrace{\boxed{n^4 - n^3}}_{= n^3(n-1) \ \downarrow\ +\infty}$$

confronto a 2

<u>Esempio 4</u> $\quad a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$

$a_0 = 0, \quad a_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad a_2 = \sin \pi = 0, \quad a_3 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$a_4 = 0, \quad a_5 = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1, \quad a_6 = 0, \quad a_7 = -1$



La succ. a_n alterna

$\underbrace{0, 1, 0, -1}, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1$

$a_{2n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2n\right) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$

La s. succ. dei termini di indice pari $\to 0$

$a_{4n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \to 1$

2 s.succ con 2 limiti diversi $\Rightarrow$ limite iniziale non esiste

Avrei potuto considerare $a_{4n+3} \to -1$ (sostituire per esercizio)

$\boxed{\text{ANALOGO PER LE FUNZIONI}}$ Utilizzo del criterio funzioni successioni

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

a_n successione tale che $a_n \to x_0$

Calcolare $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) =$

Pongo $x = a_n$

Quando $n \to +\infty$, ho che $x \to 0$

$= \lim_{x \to x_0} f(x) = l.$

$\boxed{\text{Utilizzo operativo}}$ Siano a_n e b_n 2 successioni tali che

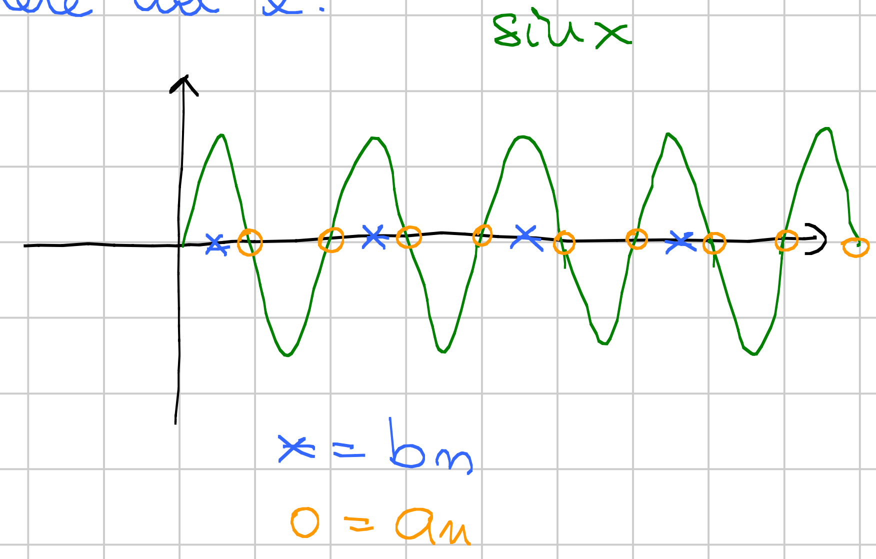
* $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$
* $f(a_n) \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$
* $f(b_n) \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

$l_1 \neq l_2$

Allora

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ NON ESISTE

Infatti, se tale limite fosse un certo $l \in \mathbb{R}$, allora $f(a_n)$ e $f(b_n)$ dovrebbero tendere ad l.



Esempio 1 $\lim_{x \to +\infty} \sin x$

$a_n = n\pi \to +\infty$

$\sin a_n = \sin(n\pi) = 0 \to 0$

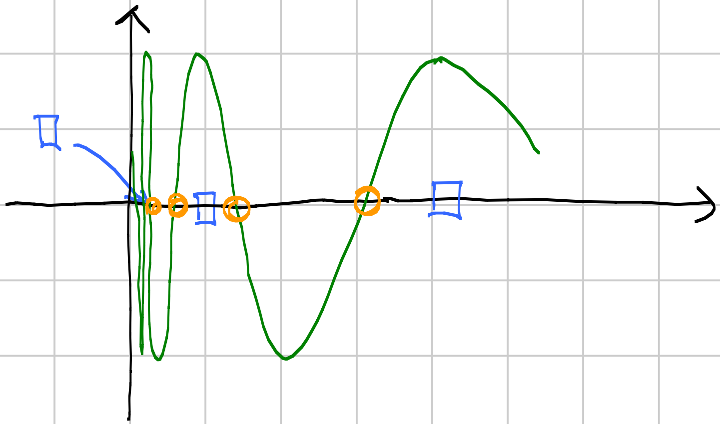
$b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \to +\infty$

$\sin b_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \to 1$

Abbiamo trovato $a_n \to \boxed{+\infty}$ e $b_n \to \boxed{+\infty}$ con $\sin a_n \to 0$, $\sin b_n \to 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to \boxed{+\infty}} \sin x$ N.E.

Esempio 2 $\lim_{x \to \boxed{0^+}} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$



Devo trovare

$a_n \to \boxed{0^+}$ e $b_n \to \boxed{0^+}$ con

$\cos\left(\frac{1}{a_n}\right) \to 0$ e $\cos\left(\frac{1}{b_n}\right) \to 1$

Come trovare a_n e b_n ?

$$\cos\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0 \implies \frac{1}{a_n} = \frac{\pi}{2} + \pi n \implies a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n} \to 0^+$$

$$\cos\left(\frac{1}{b_n}\right) = 1 \implies \frac{1}{b_n} = 2\pi n \implies b_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0^+$$