MATEMATICA I

ORA 17

Titolo nota 11/10/2007

Dimostrazione limiti notevoli

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

(questo si potrebbe dedurre dall'analogo sulle successioni)

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. DISUGUAGLIANZA: per ogni $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ si ha

$$\sin x \le x \le \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Dividendo per $\sin x$ (che è positivo tra 0 e $\frac{\pi}{2}$)

$$\boxed{1} \le \boxed{\frac{x}{\sin x}} \le \boxed{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\underset{1}{\downarrow} \qquad \underset{1}{\downarrow} \qquad \underset{\frac{1}{\cos 0} = 1}{\downarrow}$$

carabinieri

Abbiamo dimostrato che, dando la disug. per buona, si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

abbiamo lavorato in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Osserviamo che la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è PARI in quanto

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

e quindi

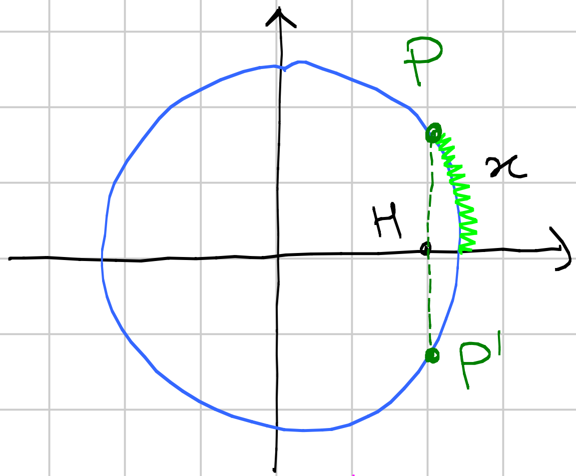
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Fatto generale: se $f(x)$ è PARI, allora $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$

Resta da dim. (1) $\sin x \leq x$ (2) $x \leq \tan x$

per $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

<u>Dim</u> (1)



arco $\overset{\frown}{PP'} = 2x$

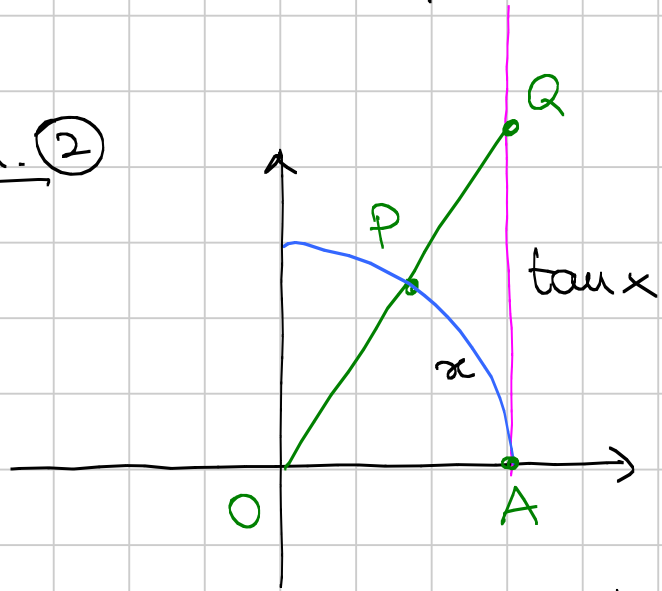
segmento $PP' = 2PH = 2 \sin x$

segmento $PP' \leq$ arco $\overset{\frown}{PP'}$

$$\cancel{2} \sin x \leq \cancel{2} x$$

— o — o —

<u>Dim.</u> (2)



Area settore OPA : Area cerchio $= x : 2\pi$

Area settore $= \dfrac{x \cdot \pi}{2\pi} = \dfrac{x}{2}$

Area triangolo OAQ $= \dfrac{1}{2} OA \cdot AQ = \dfrac{\tan x}{2}$

Area settore $\leq$ Area triangolo $\Rightarrow \dfrac{x}{\cancel{2}} \leq \dfrac{\tan x}{\cancel{2}}$

Figlio $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Nipote $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} =$$

Pongo $y = \arctan x$

Quando $x \to 0$, ho che $y \to \arctan 0 = 0$

Se $y = \arctan x$, allora $x = \tan y$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} =$$

Pongo $y = \arcsin x$, da cui $x = \sin y$

Quando $x \to 0$, ho che $y \to \arcsin 0 = 0$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} =$$

Pongo $y=-x$, dunque $x=-y$

Quando $x\to-\infty$, ho che $y\to+\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = e$$

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y}$$

$$= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} = \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}}_{\downarrow\ e}\ \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)}}_{\downarrow\ 1}$$

bisognerebbe fare il cambio $y-1=z$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \longrightarrow e$

$\log x$ è una funzione continua, quindi posso fare il log a dx e sx

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\boxed{x}}\right] = \log e = 1$$

Pongo $\frac{1}{x} = y$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} x \cdot \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$

Quando $x \to +\infty$, ho che $y \to 0^+$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y} \log(1+y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

Partendo da $\lim_{x\to \boxed{-\infty}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ e facendo esattamente le stesse sostituzioni si arriva a

$$\lim_{y\to 0^-} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} =$$

Pongo $y = e^x - 1$

Quando $x \to 0$ ho che $y \to e^0 - 1 = 0$

Ricavo x in funzione di y

$y = e^x - 1 \Rightarrow e^x = y+1 \Rightarrow x = \log(y+1)$

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1$$

— o — o —

Sia ora $a > 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

$\boxed{e^{ALLA}}$

$\boxed{B = e^{\log B} \quad \text{definizione di log}}$

$$a^x = e^{\log a^x}$$
$$= e^{x\log a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log a}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}}}_{1} \cdot \log a = \log a$$

$\boxed{y = (\log a)\, x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} =$$

Pongo $y = \log x$, dunque $x = e^y$

Quando $x \to +\infty$, ho che $y \to +\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

Perché esponenziale batte potenze

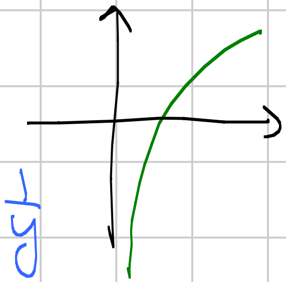
Più in generale si dimostra che

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = 0}$$

Le potenze (per $x \to +\infty$) battono i logaritmi

— o — o —

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \log x = 0^- \quad [0 \cdot (-\infty)]$$



Pongo $\frac{1}{x} = y$, cioè $x = \frac{1}{y}$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y}$$

Quando $x \to 0^+$, ho che $y \to +\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y} [-\log y] = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\log y}{y} = 0^-$$