MATEMATICA I

ORA 16

Titolo nota 10/10/2007

Esempio 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\right)^2 = 1^2 = 1$$

per limite notevole

Esempio 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \boxed{\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{1}} \cdot \boxed{\underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\frac{1}{2}}} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

FATTO PRIMA

Basta sostituire $x=0$

Esempio 3 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 2$

$$\frac{\sin(2x)}{x} = \boxed{\overset{\nearrow 1}{\frac{\sin(2x)}{2x}}} \cdot \overset{\overset{2}{\uparrow}}{\boxed{2}} = 2$$

se io pongo $y = 2x$ Quando x tende a 0 anche $y \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Esempio 4 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$

Pongo $x^2 = y$ Quando $x \to 0$, ho che $y \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Esempio 5 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 0$

$-1 \leq \sin(x^2) \leq 1$ divido per x^2

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{-\frac{1}{x^2}}} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\boxed{\frac{1}{x^2}}}$$

Esempio 6 $\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{1}{4} \sin 4$

In $x = 2$ non c'è nessun problema, dunque basta sostituire!!!

Esempio 7 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{\sin x}{x}}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{1}{\cos x}}} \longrightarrow 1$$

limite notevole →

← Posso sostituire $x = 0$

Esempio 8 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin^2 x} = 1$

$$\frac{\sin(x^2)}{\sin^2 x} = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} = \underbrace{\boxed{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}}_{\downarrow \; 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}_{\downarrow \; 1^2} \to 1$$

Esempio 9 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{x} = 5$

$$\frac{e^{5x}-1}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{e^{5x}-1}{5x}}}_{\downarrow \; 1} \cdot \underbrace{\boxed{5}}_{\downarrow \; 5} \longrightarrow 5$$

Esempio 10 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$

$$\frac{e^{x}-1}{\sin x} = \boxed{\frac{e^{x}-1}{x}} \cdot \boxed{\frac{x}{\sin x}} \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

Esempio 11 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x} = 1$

$$\frac{e^{\sin x}-1}{x} = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y} = 1$$

Pongo $y = \sin x$

Quando $x \to 0$
ho che $y \to 0$

Esempio 12 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \sin 1$

Basta sostituire
$x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x} \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to 1}\frac{\sin y}{y} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1$$

Pongo $y = \cos x$

Quando $x \to 0$,
ho che $y \to 1 = \cos 0$

—— o ——

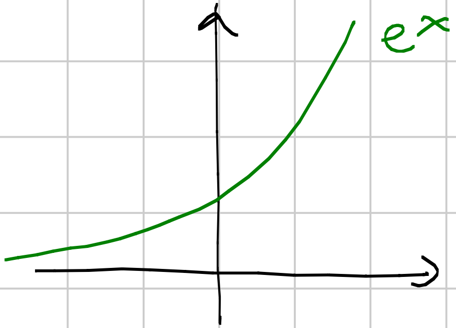
Esempio 13

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

$$\frac{e^x-1}{x} = \underset{\downarrow}{\boxed{\frac{e^x}{x}}} - \underset{\downarrow}{\boxed{\frac{1}{x}}} = +\infty$$

esponenz. contro potenza $+\infty$

0



/ o /

Esempio 14

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0-1}{-\infty}\right] = \frac{-1}{-\infty} = 0^+$$

Esempio 15 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+2x^2}{3x^3-5x} = \frac{1}{3}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\frac{x^3+2x^2}{3x^3-5x} = \frac{\cancel{x^3}\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x^3}\left(3-\frac{5}{x^2}\right)} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

Esempio 16 $\lim_{x \to 0} \frac{x^3+2x^2}{3x^3-5x}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

posso sostituire $x=0$

$$\frac{x^3+2x^2}{3x^3-5x} = \frac{x^{\cancel{2}}(x+2)}{\cancel{x}(3x^2-5)} = x\,\frac{x+2}{3x^2-5} \longrightarrow 0$$

"MORALE": a $+\infty$ comandano le potenze con esponente + grande, a 0 le potenze con esponente + piccolo

Esempio 17 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3+2x^2}{3x^2-5x} = -\infty$

(a $-\infty$ contano le pot. + grandi: raccogliere x^3)