MATEMATICA I — ORA 15

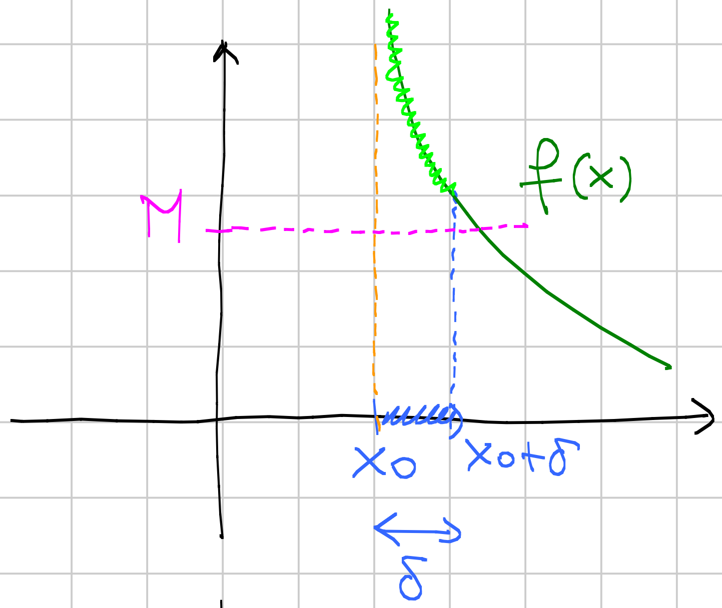
Titolo nota 10/10/2007

Varianti della def. di limite $x \to x_0^+$ $x \to x_0^-$

Si dice che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$ $\forall x \in (x_0, x_0+\delta]$

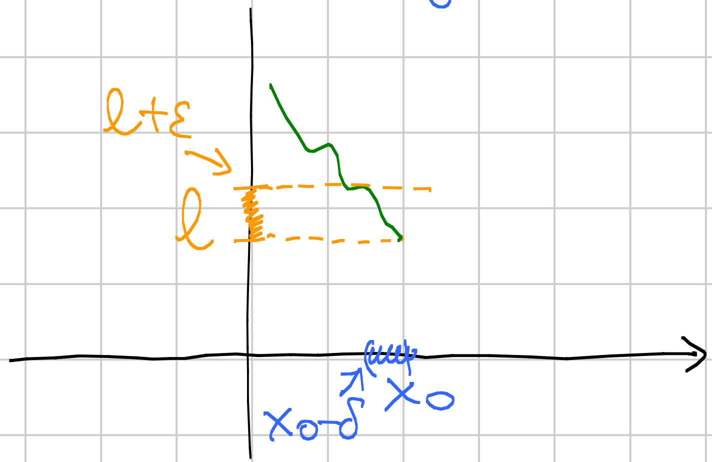


Si dice che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^+$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche vicinissimo a 0)

$\exists \delta > 0$ t.c. $\ell \boxed{<} f(x) \leq \ell + \varepsilon$

$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$



Strumenti per il calcolo dei limiti di funzione

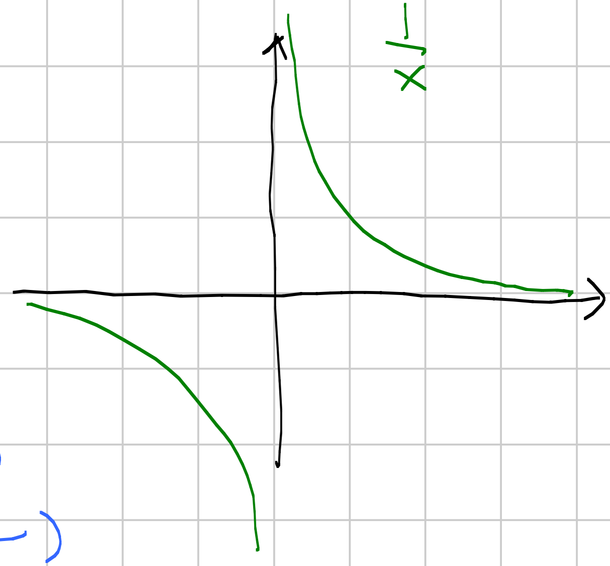
① <u>Teo. di confronto</u> (a 2 e a 3): esattamente come per le succ.

② <u>Teo. algebrici</u>: come nelle successioni con la solita cautela per le forme indeterminate

$+\infty-\infty$, $0\cdot\pm\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, 0^0, $1^{\pm\infty}$, $(+\infty)^0$

e la cautela sui segni quando il denomin. tende a zero

<u>Esempio</u> $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ NON ESISTE



$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

basta per dire che il limite a 0 (senza + e senza −) non esiste

(3) Utilizzo della continuità

Def. Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in un p.to $x_0 \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè se il valore in x_0 coincide con il limite.

"Teorema" Tutte le funzioni ottenute a partire dalle funzioni elementari (cioè quelle presentate a suo tempo) mediante operazioni algebriche e/o composizione sono continue dove sono definite (al di fuori dei problemi BUROCRATICI: denominatori che si annullano, log di roba ≤ 0, ...)

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{2^{\cos(\sin x^2)} - x \arctan(x+3^x)}{x^6 + 5\cos x}}}_{f(x)} = \frac{2}{5}$$

La funzione $f(x)$ NON ha problemi in $x=0$
(il denominatore è 5 per $x=0$)
Quindi $f(x)$ è continua in $x=0$, QUINDI

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

(fare il limite per $x \to 0$ è come sostituire $x=0$ nella funzione)

Sostituendo $f(0) = \frac{2}{5}$.

— o — o —

④ Limiti notevoli: alcuni limiti che si dimostrano una volta x tutte e poi si possono utilizzare

— o — o —

⑤ Cambio di variabile

LIMITI NOTEVOLI

$\boxed{\text{PADRI}}$ $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\boxed{\text{FIGLI}}$ $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

[Nota bene: $\log x$ (indicato anche con $\ln x$) indica $\log_e x$]

$\boxed{\text{NIPOTI}}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$

Esercizio 1 $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}$ Non esiste

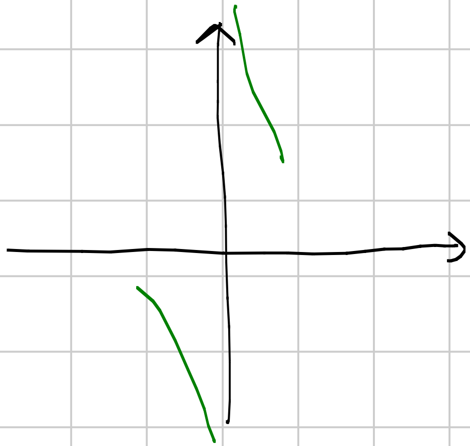
cos x è una funzione continua

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} x = 0^+$$

$$= \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$



Quindi $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}$ non esiste

Esercizio 2 $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ Motivo $-1 \leq \cos x \leq 1$

Divido per x

$$\boxed{-\frac{1}{x}} \leq \boxed{\frac{\cos x}{x}} \leq \boxed{\frac{1}{x}} \qquad \text{carabinieri}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0$$

Esercizio 3

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan(3^x + x^8 - \sin^2 x)}{x + 3\cos x} = 0$$

Motivo:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(\text{Mostro}) \leq \frac{\pi}{2}$$

Per valori grandi di x il denominatore è >0, quindi posso dividere per x conservando i versi

$$\underbrace{\boxed{-\frac{\pi}{2} \frac{1}{x+3\cos x}}}_{\to 0} \leq \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(\text{Mostro})}{x+3\cos x}}}_{\to 0 \text{ carab.}} \leq \underbrace{\boxed{\frac{\pi}{2} \frac{1}{x+3\cos x}}}_{\to 0}$$

$$\underbrace{\boxed{x+3\cos x}}_{\to +\infty} \geq \underbrace{\boxed{x - 72}}_{\to +\infty}$$

confronto a 2