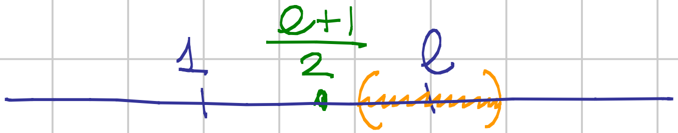
Dim. criterio della radice

$\boxed{1^\circ \text{ caso}}$ Ipotesi: $\sqrt[n]{a_n} \to l > 1$ Tesi: $a_n \to +\infty$



Se $\sqrt[n]{a_n} \to l$, allora

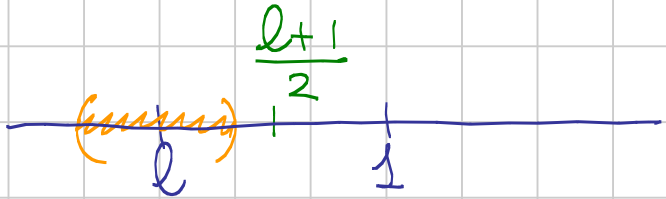
$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$$ definitivamente. Elevando alla n:

$$a_n \geq \boxed{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}$$

$\downarrow +\infty$ perché esponenziale con base > 1

a_n $\downarrow$ $+\infty$ per confronto a 2

$\boxed{2^\circ \text{ caso}}$ Ipotesi: $\sqrt[n]{a_n} \to l < 1$ Tesi: $a_n \to 0$



Se $\sqrt[n]{a_n} \to l$, allora definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} \le \frac{l+1}{2}$$

elevando alla potenza n:

per ipotesi

$$\boxed{0} \le a_n \le \boxed{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}$$

$\downarrow$ 0 $\quad$ $\downarrow$ 0 $\quad$ $\downarrow$ 0 (esponenziale con base <1)

CARABINIERI

<u>Nota bene</u> Se $a_n \le b_n$ definitiv. e $b_n \to l \in \mathbb{R}$.
Cosa posso dire di a_n? Può

① $a_n \to -\infty$ ② $a_n \to l_1$ con $l_1 \le l$ ③ non avere limite

Altro limite notevole

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$$

Analogamente

$\sqrt[n]{a} \to 1$
per ogni $a > 0$

Dim ABUSIVA

$$\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \to 2^0 = 1$$

Dim VERA — Disuguaglianza di BERNOULLI

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

pongo $x = \frac{1}{n}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 = 2$$

Faccio la radice n-esima

$$\boxed{1 + \frac{1}{n}} \geq \boxed{\sqrt[n]{2}} \geq \boxed{1}$$

segue dal fatto che $\sqrt[n]{2} \geq \sqrt[n]{1} = 1$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

Esempio 1 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$

Abusivo

$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \longrightarrow \infty^0$ FORMA INDETERMINATA

Rapporto $\to$ Radice (se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, allora $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ stesso)

Uso il criterio con a_n = "ciò che sta sotto la radice n-esima" $= n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1 .$$ Quindi

$\sqrt[n]{a_n} \to 1$ che è come dire $\boxed{\sqrt[n]{n} \to 1}$

Esempio 2 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+5}$

Chiamo $a_n = n^2+5$ e uso rapporto $\to$ radice

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+5}{n^2+5} = \frac{n^2+2n+6}{n^2+5} =$$

$$= \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{5}{n^2}\right)} \longrightarrow 1$$

stesso limite

Quindi $\sqrt[n]{n^2+5} = \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1$

In alternativa

$$\sqrt[n]{n^2+5} = \sqrt[n]{n^2\left(1+\frac{5}{n^2}\right)} = \sqrt[n]{n^2}\,\sqrt[n]{1+\frac{5}{n^2}}$$

$$= \left[\sqrt[n]{n}\right]^2 \left(1+\frac{5}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1^2 \cdot 1^0 = 1$$

In generale $\boxed{\sqrt[n]{\text{polinomio}} \longrightarrow 1}$

Esempio 3 $\boxed{\sqrt[n]{n!} \longrightarrow +\infty}$

Pongo $a_n = n!$ e uso Rapporto → Radice

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1 \longrightarrow +\infty$$

Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to +\infty$, anche $\sqrt[n]{a_n} \to +\infty$, dunque $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$

Esempio 4 $\sqrt[n]{2^n + 3^n + n^4}$. Stabilito che 3^n sembra il termine + forte, allora lo raccogliamo

$$\sqrt[n]{2^n+3^n+n^4} = \sqrt[n]{3^n\left(\frac{2^n}{3^n}+1+\frac{n^4}{3^n}\right)}$$

$$= \sqrt[n]{3^n}\ \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1+\frac{n^4}{3^n}}$$

$$= 3\left[\boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^n}+1+\boxed{\frac{n^4}{3^n}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

esponenziale con base < 1 $\to 0$ $\qquad$ $\to 0$ potenza contro esponenziale

$$\longrightarrow 3\cdot[1]^0 = 3$$

Esempio 5 $\qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}}$ $\quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

Applico rapporto $\to$ radice con $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

Poiché $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{e}$, anche $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{e}$

— o — o —

Radice $\to$ Rapporto ? Supponiamo $a_n > 0$ e supponiamo $\sqrt[n]{a_n} \to l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Cosa può fare $\frac{a_{n+1}}{a_n}$? Non può tendere ad un limite diverso da l. Quindi

① tende a l ② non ha limite