CRITERI
- ↗ RAPPORTO
- → RADICE
- ↘ RAPPORTO → RADICE

CONFRONTI DI ORDINE DI INFINITO

$\boxed{\text{CRITERIO DELLA RADICE}}$ Sia a_n una successione, con $a_n \geq 0$ definitiv.

Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \to l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora:
- se $l > 1$ si ha che $a_n \to +\infty$
- se $0 \leq l < 1$ si ha che $a_n \to 0$
- se $l = 1$, allora BOH (non si può dedurre nulla)

$\boxed{\text{CRITERIO DEL RAPPORTO}}$ Sia a_n una succ. con $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Allora stessa conclusione del criterio precedente.

— o — o —

Utilizzo operativo di radice e/o rapporto:
abbiamo una succ. a_n di cui dobbiamo calcolare il limite.
Proviamo allora a calcolare uno dei seguenti 2 limiti:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \qquad\qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se uno almeno di questi 2 limiti esiste ed è $\neq 1$, allora possiamo dedurre il limite di a_n.

— o — o —

CRITERIO RAPPORTO → RADICE

Sia a_n una succ con $a_n > 0$ definitiv.

Supponiamo che $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Allora $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ (stesso ℓ)

— o — o —

<u>Esempio 1</u> $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ Provo ad usare il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{\underbrace{2^{n+1}}_{=2\cdot\cancel{2^n}}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n^2} = \frac{1}{2} \overbrace{\boxed{\frac{n^2+2n+1}{n^2}}}^{\to 1} \to \frac{1}{2} = \ell$$

$\ell < 1$ DUNQUE $a_n \to 0$

Più in generale

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{\beta^n} = 0 \qquad \begin{array}{l}\text{per ogni } \alpha>0 \\ \text{per ogni } \beta>1\end{array}}$$

ESPONENZIALE BATTE LE POTENZE

— o — o —

FATTORIALE

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$$

FATTORIALE DI n

(prodotto di tutti gli interi da 1 fino ad n)

(per convenzione $0! = 1$)

$0! = 1$ $\quad 1! = 1,$ $\quad 2! = 1\cdot 2 = 2,$ $\quad 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24,$ $\quad 5! = 120,$ $\quad 6! = 720,$ $\quad 7! = 5040$

Formula ricorsiva

$$\boxed{(n+1)! = (n+1)\cdot n!}$$

$$(n+1)! = (n+1)\cdot \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{n!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

$$\underset{\downarrow\, +\infty}{\boxed{n!}} \geq \underset{\downarrow\, +\infty}{\boxed{n}}$$

Esempio 2 $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{200^n}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Criterio del rapporto $a_n = \frac{n!}{200^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{200^{n+1}}}{\frac{n!}{200^n}} = \frac{(n+1)!}{200^{n+1}} \cdot \frac{200^n}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)\cancel{n!}}{200 \cdot \cancel{200^n}} \cdot \frac{\cancel{200^n}}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{200} \to +\infty$$

Quindi $l = +\infty > 1$, e pertanto $a_n \to +\infty$

In generale

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty \quad \text{per ogni } a > 0}$$

ESPONENZ. PERDE DAL FATTORIALE

IL NUMERO e

$$\lim_{n \to +\infty} \boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e = 2,7182\ldots$$

Dai teoremi algebrici è una forma del tipo

$1^{+\infty}$, dunque indeterminata.

SI PUÒ DIMOSTRARE che la successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

è STRETT. CRESCENTE e $a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Da questi 2 fatti segue che $a_n \to l \in \mathbb{R}$.
Tale limite si indica con la lettera e.

— o — o —

Esempio 3

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty}$$

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

Criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e = 2,7\ldots \boxed{> 1}$$

Quindi $a_n \to +\infty$

Esempio 4 $\lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^n} \cdot n^n}{\cancel{n^n}} = \lim_{n \to +\infty} n^n = +\infty$

Esempio 5 $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{(1,01)^{n^2}} = 0$

$a_n = \frac{n^n}{(1,01)^{n^2}}$ Applico criterio della radice

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{(1,01)^{n^2}}} = \frac{n}{(1,01)^n} \to 0$ (esponenziale contro potenza)

$\sqrt[n]{a_n} \to l < 1 \implies a_n \to 0$