MATEMATICA I

$\boxed{\text{ORA 3}}$

Titolo nota 03/10/2007

PRINCIPIO DI INDUZIONE

$\mathbb{N}$ = insieme numeri naturali = $\{\boxed{0}, 1, 2, 3, \ldots\}$

c'è

P_n = proprietà dei numeri naturali, cioè una frase che contiene un parametro $n \in \mathbb{N}$ e che a seconda del valore di n può essere vera o falsa.

<u>Esempi</u>: $P_n = \boxed{n^2 - 7 > n}$

$P_n = \boxed{n+1 < n}$

<u>Obiettivo</u>: capire per quali valori di n si ha che P_n è vera.

Principio di induzione

Supponiamo che

(i) P_0 è vera (sostituendo $n=0$ al parametro si ha una frase vera)

PASSO BASE
(PRIMA TESSERA CADE)

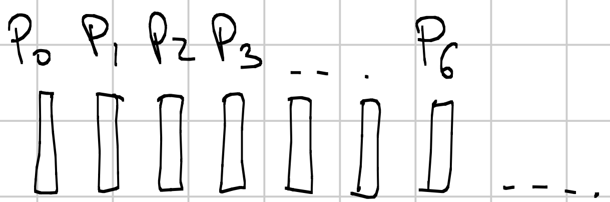
(ii) se P_n è vera, allora P_{n+1} è vera (se la frase è vera per un certo valore di n, allora è vera per il successivo)

PASSO INDUTTIVO
(MECCANISMO DI CADUTA)

Allora P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

— o — o —

Interpretazione brutale



P_0 è vera per il punto (i)

se P_0 è vera, P_1 è vera (punto (ii) con $n=0$)

se P_1 è vera, P_2 è vera ($n=1$)

se P_2 è vera, P_3 è vera, ...

Variante 1 Supponiamo che

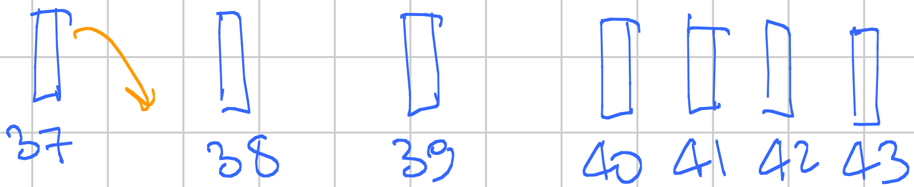
(i) P_{37} è vera
(ii) P_n vera $\Rightarrow$ P_{n+1} vera $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

Allora P_n è vera $\forall n \geq 37$

Variante 2 Supponiamo che

(i) P_{37} è vera
(ii) P_n vera $\Rightarrow$ P_{n+1} vera $\quad \forall n \geq 40$

Allora possiamo dedurre SOLO che P_{37} è vera



Per poter dedurre qualcosa mi servirebbe dimostrare che P_{40} è vera.

Esempio 1 $\quad 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 1$

Dimostriamolo per induzione

$\boxed{\text{PASSO BASE}}$ $\boxed{n=1}$ $\quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ $\quad \boxed{\text{VERA}}$

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$ Ipotesi: P_n vera, cioè $1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Tesi: P_{n+1} vera, cioè $1+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Dim passo induttivo

$$\boxed{1+\dots+(n+1)} = \underbrace{1+\dots+n}+(n+1) \quad \text{(Uso l'ipotesi)}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

Esempio 2 Sia $a \neq +1$. Allora

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \qquad \forall n \geq 1$$

PASSO BASE $\boxed{n=1}$

$$1 + a = \frac{a^2 - 1}{a - 1} = \frac{(a+1)\cancel{(a-1)}}{\cancel{a-1}} \quad \text{OK}$$

PASSO INDUTTIVO

Ipotesi: P_n vera, cioè $1 + a + \dots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

Tesi: P_{n+1} vera, cioè $1 + a + \dots + a^{n+1} = \dfrac{a^{n+2} - 1}{a - 1}$

Dim. passo induttivo

$$\boxed{\underbrace{1 + a + \dots + a^n}_{} + a^{n+1}} = \underbrace{\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}}_{} + a^{n+1} = \frac{\cancel{a^{n+1}} - 1 + a^{n+2} - \cancel{a^{n+1}}}{a - 1}$$

Uso ipotesi induttiva

$$= \boxed{\frac{a^{n+2} - 1}{a - 1}}$$

Esempio 3 $\qquad 2^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

PASSO BASE $\boxed{n=0}$ $\qquad 2^0 \overset{?}{\geq} 0 \qquad 1 \overset{?}{\geq} 0$ $\qquad$ OK, vero

PASSO INDUTTIVO $\qquad$ Ipotesi: $2^n \geq n$

Tesi: $2^{n+1} \geq n+1$

Dim. passo induttivo

$$\boxed{2^{n+1}} \overset{\text{PCM}}{=} 2\cdot 2^n \underset{\text{USO IPOTESI}}{\geq} 2\cdot n \underset{\text{SPERO}}{\geq} \boxed{n+1}$$

Se la speranza si realizza, posso concludere che $2^{n+1} \geq n+1$, cioè la tesi

La speranza si realizza? $\qquad 2n \overset{?}{\geq} n+1 \rightarrow$ vera per $n \geq 1$

Quindi: il passo induttivo (meccanismo di caduta) funziona solo per $n \geq 1$. Bisogna dim. che P_1 è vera

$\boxed{n=1}$ $\qquad 2^1 \overset{?}{\geq} 1$ $\qquad$ OK, FINE.