MATEMATICA I

ORA 2

Titolo nota 02/10/2007

FUNZIONI TRA INSIEMI

Che cos'è una funzione? Non ve lo dico.

Come si presenta una funzione.

$$f : A \longrightarrow B$$

Ci sono 3 elementi:

1. Un insieme di partenza (A)
2. Un insieme di arrivo (B)
3. Una "legge" che ad ogni el. di A associa un unico el. di B

l'elemento associato ad $a \in A$ si indica con $f(a)$

TERMINOLOGIA

INIETTIVA
SURGETTIVA
BIGETTIVA
INVERTIBILE

Una funzione $f: A \to B$ si dice INIETTIVA se elementi diversi di A vanno a finire in elementi diversi di B

Più precisamente

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

Oppure equivalentemente

$$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

Due modi di dire la stessa cosa

— o — o —

Una funzione $f: A \to B$ si dice SURGETTIVA se ogni elemento di B è raggiunto dalla funzione

Più precisamente:

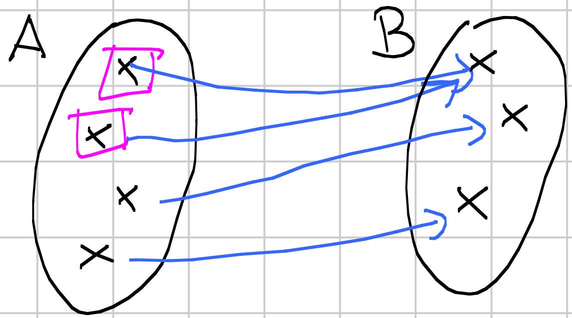
$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad t.c. \quad b = f(a)$$

PER OGNI — ESISTE ALMENO UN — TALE CHE

— o — o —

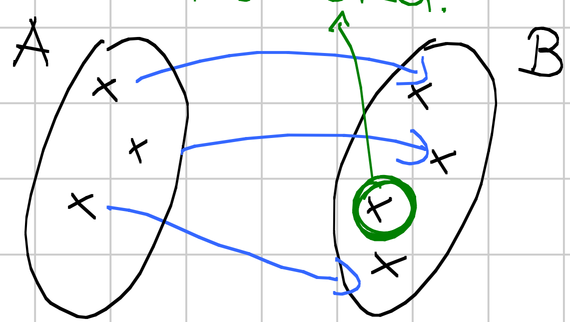
f si dice BIGETTIVA se è CONTEMPORANEAMENTE iniettiva e surgettiva.

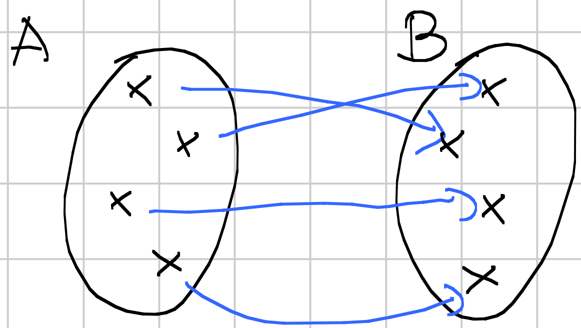
Esempi



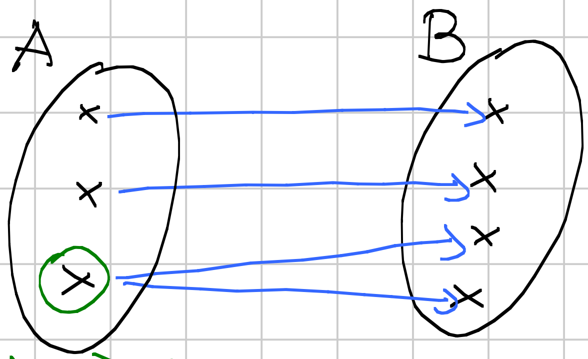
NO INIET.
SI SURG.

SI INIETT.
NO SURG.



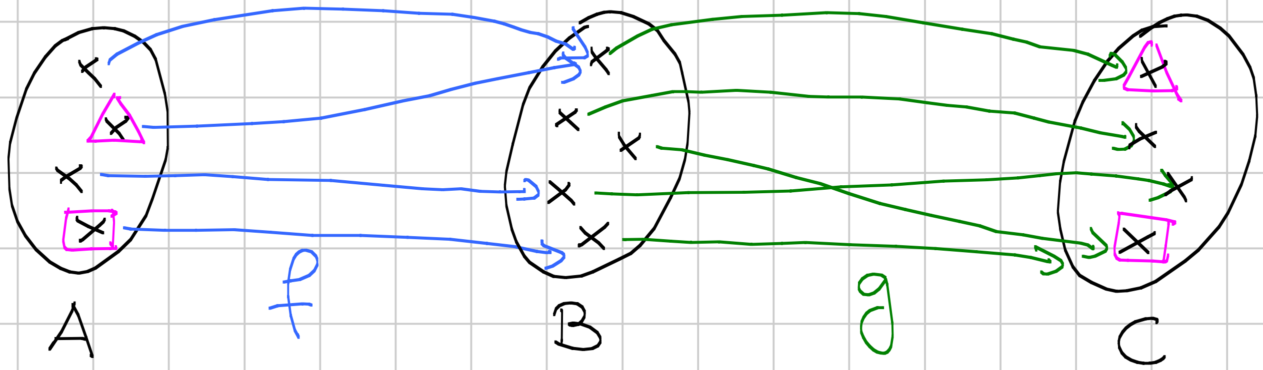


SI INIETT.
SI SURG.
$\Downarrow$
BIGETTIVA



NON È UNA FUNZIONE

COMPOSIZIONE DI 2 FUNZIONI



f NO INIETTIVA, NO SURGETTIVA

g NO INIETTIVA, SI SURGETTIVA

Data una funzione $f: A \to B$ e una funzione $g: B \to C$ la COMPOSIZIONE è una funzione

$$\underbrace{g \circ f}_{} : A \longrightarrow C$$

fare prima la f e poi la g

Per definire la composizione di 2 funzioni f e g occorre che l'insieme di arrivo della prima sia l'insieme di partenza della seconda.

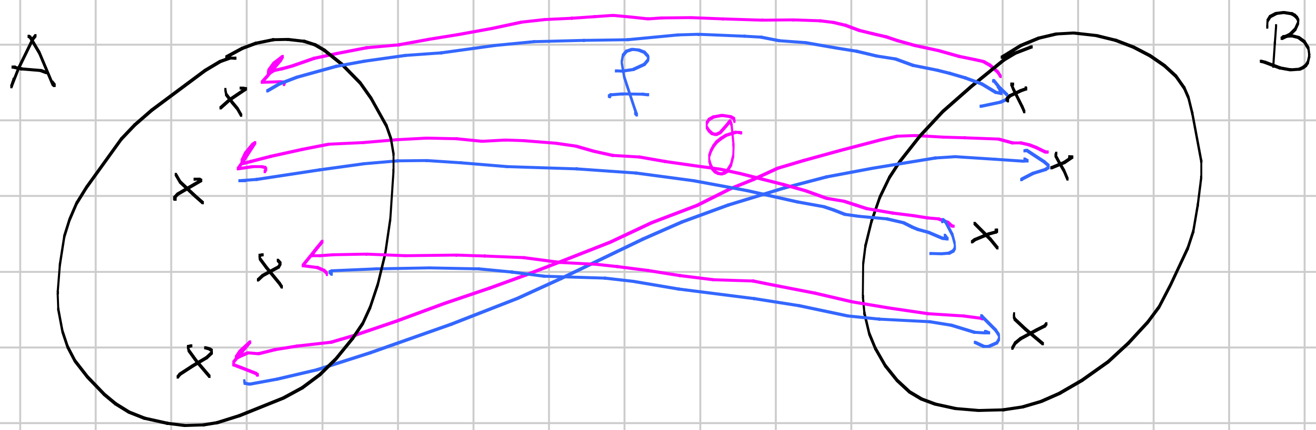
FUNZIONE INVERSA

Una funzione $f: A \to B$ si dice INVERTIBILE se esiste una funzione $g: B \to A$ "che torna indietro" cioè tale che

$$g(f(a)) = a \qquad \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \qquad \forall b \in B$$

Questa funzione g si dice INVERSA di f e spesso si indica con il simbolo f^{-1}



Teorema Una funzione è INVERTIBILE se e solo se è BIGETTIVA

— o — o —

GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Data $f : A \to B$, il suo grafico è l'insieme

$$\text{Grafico}(f) = \{ (a,b) \in A \times B : \underbrace{b = f(a)}_{} \}$$

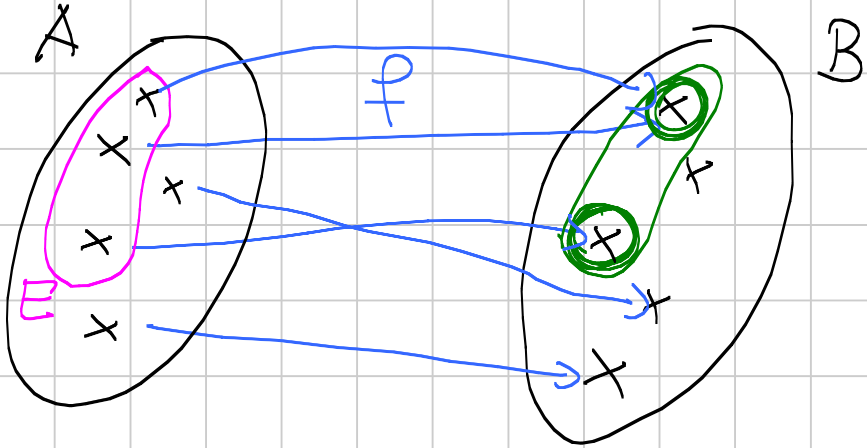
seconda coordinata = f (prima coordinata)

— o — o —

IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

Sia $f : A \to B$. Sia $E \subseteq A$

Si definisce IMMAGINE di E il sottoinsieme di B costituito dai valori raggiunti a partire da E

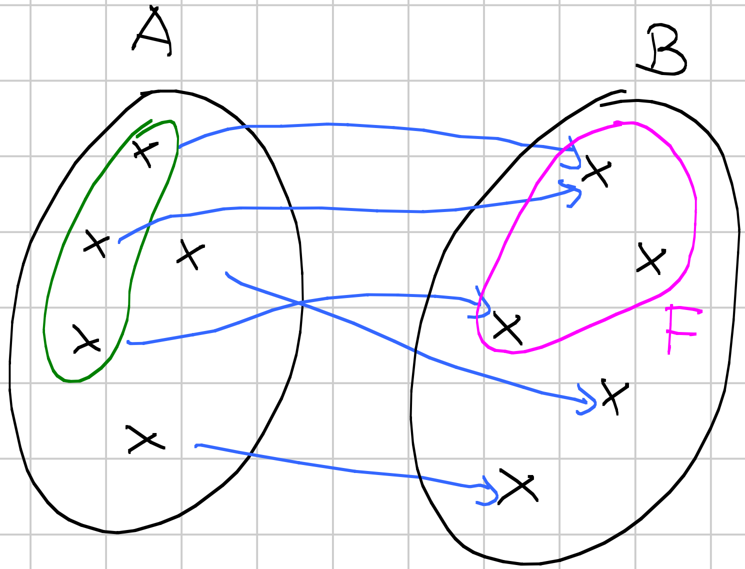


Più formalmente:

PER ELENCO

$$f(E) = \{ f(a) : a \in E \} \subseteq B$$

Dato un sottoinsieme $F \subseteq B$, si definisce CONTROIMMAGINE di F il sottoinsieme di A definito da



$$f^{-1}(F) = \{ a \in A : f(a) \in F \}$$

PER PROPRIETÀ

ACHTUNG !! Il simbolo f^{-1} si usa per indicare ALMENO 3 cose diverse !!!

1. La controimmagine
2. La funzione inversa
3. $\frac{1}{f}$

ESERCIZIO HARD! quanti elementi ha

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))).$$