ANALISI II CIV

ORA 41 MISSING

ORA 42

Esempio 1 $\quad u' = u \quad$ Una soluzione è $u(t) = e^t$

Un'altra soluzione è $u(t) = 2e^t$. Verifica: $u'(t) = 2e^t$

In generale $u(t) = ce^t$ è una soluzione qualunque sia il valore della costante c $\Rightarrow$ infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

Si potrebbe dim. che non ce ne sono altre.

Esempio 2 $\quad u'' = -u \quad$ Una soluzione è $u(t) = \sin t$

Un'altra è $u(t) = \cos t$

In generale $u(t) = a \sin t + b \cos t$ è una soluzione qualunque siano i valori di a e b

$\Rightarrow$ infinite soluzioni dipendenti da 2 param.

Esempio 3 $\quad u' = -u^2 \qquad$ Una soluzione è $u(t) = \frac{1}{t}$

Verifica $\quad u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -u^2(t)$

Una famiglia infinita di soluz. è $\quad u(t) = \frac{1}{t+c}$

$\Rightarrow$ infinite soluz. dipendenti da un parametro.

IN GENERALE: un'eq. diff. ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri uguale all'ORDINE dell'equazione.

— o — o —

$\boxed{\text{PROBLEMA DI CAUCHY}}$ Eq. diff. + condiz. iniziali in numero uguale all'ordine dell'eq.

Esempi

$$\begin{cases} u' = u + t \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

← Eq. diff. di ordine 1

← 1 cond. iniziale (fissare il valore di u per un certo valore di t)

$u(t_0) = u_0$

numeri fissati

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(7) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(0) = 5 \\ u'(0) = 6 \end{cases}$$

← Eq. diff. di ordine 2

Due condizioni iniziali

Per avere un problema di Cauchy devo assegnare i valori di u e di tutte le sue derivate fino alla $(n-1)$-esima in uno stesso punto t_0

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(\boxed{5}) = 6 \\ u'(\boxed{7}) = 6 \end{cases}$$

No pb. di Cauchy
ho dato u e u'
per valori diversi
di t_0

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(0) = 5 \\ u(3) = 6 \end{cases}$$

No pb. di
Cauchy: dovevo
assegnare u e u'

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(\underline{5}) = 7 \\ u'(\underline{5}) = 6 \end{cases}$$

Sì pb. di
Cauchy

$$\begin{cases} u'' = u^2 + t \\ u(5) = 7 \\ \boxed{u''}(5) = 7 \end{cases}$$

No! Dovrebbe essere u'

$$\begin{cases} u''' = u' + t \\ u(5) = 6 \\ u'(5) = 8 \\ u''(5) = 27 \end{cases}$$

Consideriamo un problema di Cauchy per un'eq. diff. di ordine n in forma normale

$$\boxed{\begin{cases} u^{(n)} = \Phi\left(u^{(n-1)}, \dots, u', u, t\right) \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = u_n \end{cases}}$$

TEO. ESISTENZA E UNICITÀ.

- Se Φ è continua allora il problema ammette ALMENO una soluzione LOCALE, cioè definita almeno per valori di t vicini a t_0.
- Se Φ è un po' meglio (diciamo differenziabile) allora la soluzione è UNICA.

EQUAZIONI 1° ORDINE A VARIABILI SEPARABILI

$$\boxed{u' = f(t)\, g(u)}$$

È possibile trovare la formula generale della soluzione in 3 fasi:

SEPARARE
INTEGRARE
RICAVARE

Esempio $\quad u' = t^2 u^3$

SEPARARE: $\dfrac{du}{dt} = t^2 u^3$

Tutte le u a sinistra, tutte le t a destra!

$$\frac{du}{u^3} = t^2\, dt$$

INTEGRARE (a sinistra risp. a u, a destra risp. a t)

$$\int \frac{du}{u^3} = \int t^2 dt \implies -\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} = \frac{t^3}{3} + c$$

RICAVARE (u in funzione di t)

$$\frac{1}{2u^2} = -\frac{t^3}{3} + \boxed{c}$$

è una costante, quindi chiamarla c o $-c$ è lo stesso

$$\frac{1}{2u^2} = \frac{-t^3 + \boxed{c}}{3}$$ come sopra

$$2u^2 = \frac{3}{c - t^3}$$

$$u^2 = \frac{3}{2(c-t^3)}$$

$$\boxed{u = \pm\sqrt{\frac{3}{2(c-t^3)}}}$$

Questa formula fornisce le infinite sol. dell'eq.

Se avessi avuto il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = t^2 u^3 \\ \boxed{u(0) = 1} \end{cases}$$

$\to$ Sulla base di questa si ricava il valore di c

DETERMINARE c $\qquad u(0) = 1$

$$u(0) = \sqrt{\frac{3}{2c}} = 1 \quad ; \quad \frac{3}{2c} = 1 \implies c = \frac{3}{2}$$

Scelgo segno + perché $u(0) > 0$

$\implies$ la soluzione del pb. di Cauchy è

$$u(t) = \sqrt{\frac{3}{2\left(\frac{3}{2} - t^3\right)}} = \sqrt{\frac{3}{3-2t^3}}$$

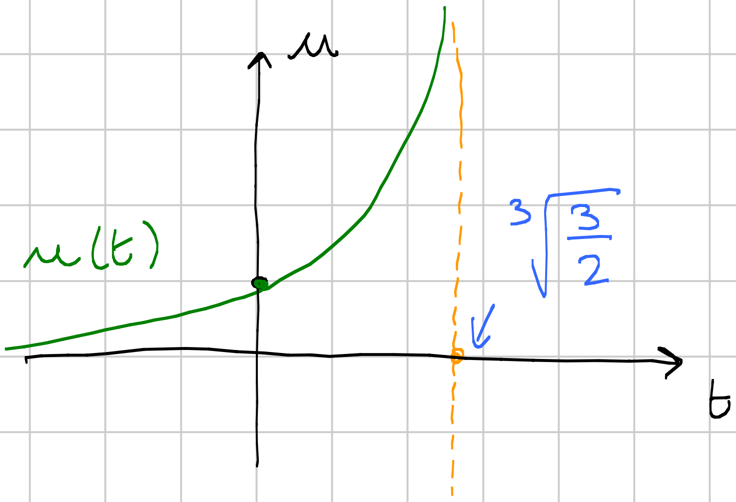
CONTROLLARE! Il modo migliore per farlo è sostituire nell' eq. dopo aver derivato

$u' = \dots,$ Per controllare la cond. iniz. basta sostituire $t=0$ $u(0) = \sqrt{1} = 1$ ok.

STUDIARE LA SOLUZIONE $u(t) = \sqrt{\dfrac{3}{3-2t^3}}$

La soluzione esiste finché $3-2t^3 > 0 \iff 2t^3 < 3$

$\iff t^3 < \frac{3}{2} \iff t < \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. La soluzione non è definita per ogni t, ma almeno per t vicini a $t=0$.



ANALISI II CIV $\boxed{\text{ORA } 43}$

$$\begin{cases} u' = t u^4 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

SEPARARE: $\dfrac{du}{dt} = t u^4$; $\dfrac{du}{u^4} = t\,dt$

INTEGRARE: $\displaystyle\int \frac{du}{u^4} = \int t\,dt$

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{u^3} = \frac{t^2}{2} + c$$

$\boxed{\text{RICAVARE}}$ $\dfrac{1}{3u^3} = -\dfrac{t^2}{2} + c = \dfrac{-t^2+c}{2}$; $3u^3 = \dfrac{2}{c-t^2}$

$$u^3 = \frac{2}{3(c-t^2)} = \frac{2}{c-3t^2}$$

$$\boxed{u(t) = \sqrt[3]{\frac{2}{c-3t^2}}}$$

SOLUZIONE GENERALE

$\boxed{\text{DETERMINARE } c}$ $u(0) = 2$

$\sqrt[3]{\dfrac{2}{c}} = 2$ $\qquad \dfrac{2}{c} = 8 \Rightarrow c = \dfrac{1}{4}$

Soluzione pb. di Cauchy

$$u(t) = \sqrt[3]{\frac{2}{\frac{1}{4} - 3t^2}} = \sqrt[3]{\frac{8}{1-12t^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{1-12t^2}}$$

$\boxed{\text{CONTROLLARE}}$ Fare la verifica! $u(0) = 2\sqrt[3]{1} = 2$ Ok.

$$u'(t) = 2\left(1-12t^2\right)^{-\frac{4}{3}}(-24t)\left(-\frac{1}{3}\right); \quad u(t) = 2\left(1-12t^2\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{48}{3}\, t \left(1-12t^2\right)^{-\frac{4}{3}} = 16\, t\left(1-12t^2\right)^{-\frac{4}{3}}$$

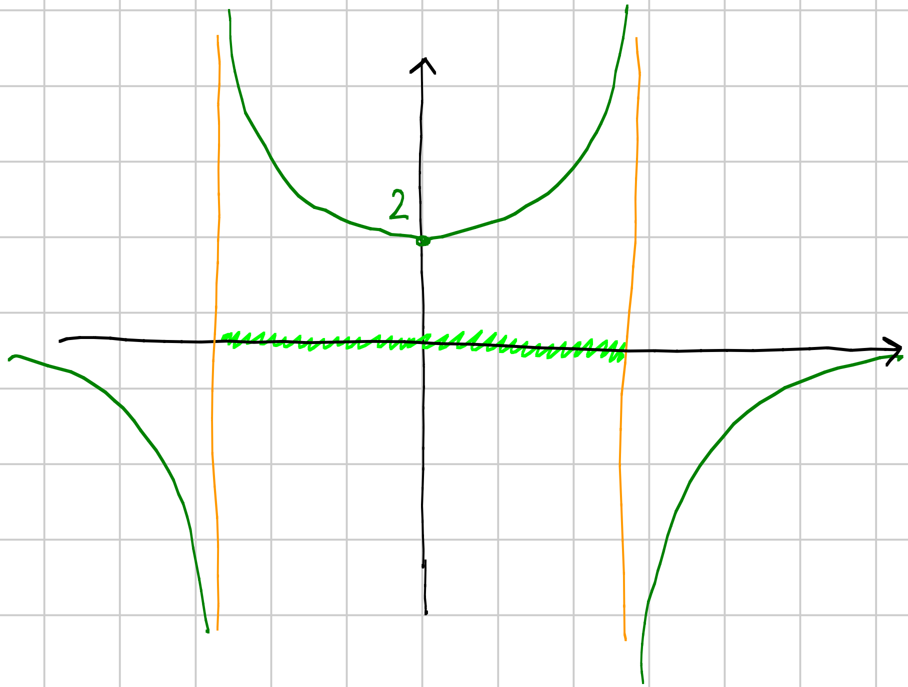
Questo DOVREBBE essere $t \cdot u^4$

Lo è perché $u^4 = 16\left(1-12t^2\right)^{-\frac{4}{3}}$

$\boxed{\text{STUDIARE LA SOLUZIONE}}$ Studio $u(t) = 2\sqrt[3]{\frac{1}{1-12t^2}}$

Definita quando $1-12t^2 \neq 0$ $\quad 12t^2 \neq 1$

$t^2 \neq \frac{1}{12}$ $t \neq \pm \frac{1}{\sqrt{12}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$



$\boxed{\text{Def. 1}}$ Si dice intervallo massimale di esistenza il pezzo dell'insieme di definizione che contiene l'istante iniziale.

Nel nostro esempio l'int. max di esistenza è

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

$\boxed{\text{Def. 2}}$ Si dice TEMPO DI VITA della soluzione (LIFE SPAN) l'estremo superiore dell'int. max. di esistenza.

Nel nostro esempio $T = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Def. 3 Si dice che la soluzione ha ESISTENZA GLOBALE nel futuro se $T = +\infty$, cioè se la soluzione esiste per ogni $t \geq t_0$.

Def. 4 Se il tempo di vita T è $< +\infty$, diciamo che si ha BLOW-UP (SCOPPIAMENTO) se

$$\lim_{t \to T^-} u(t) = +\infty \quad \text{oppure} \quad -\infty$$

Diciamo che si ha BREAK-DOWN (ROTTURA) se non c'è blow-up, ma

$$\lim_{t \to T^-} u'(t) = \pm\infty$$

Derivata

Nell'esempio la soluzione aveva BLOW-UP per $t = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2+1 \\ u(0) = -1 \end{cases}$ ← Eq. a variabili separabili

SEPARARE $\frac{du}{dt} = u^2+1$; $\frac{du}{u^2+1} = dt$

INTEGRARE $\int \frac{du}{u^2+1} = \int dt$; $\arctan u = t + c$

RICAVARE $\boxed{u = \tan(t+c)}$ Soluzione generale

DETERMINARE c $u(0) = -1 \iff \tan c = -1 \Rightarrow c = -\frac{\pi}{4}$

$$u(t) = \tan\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$ Soluzione pb. Cauchy

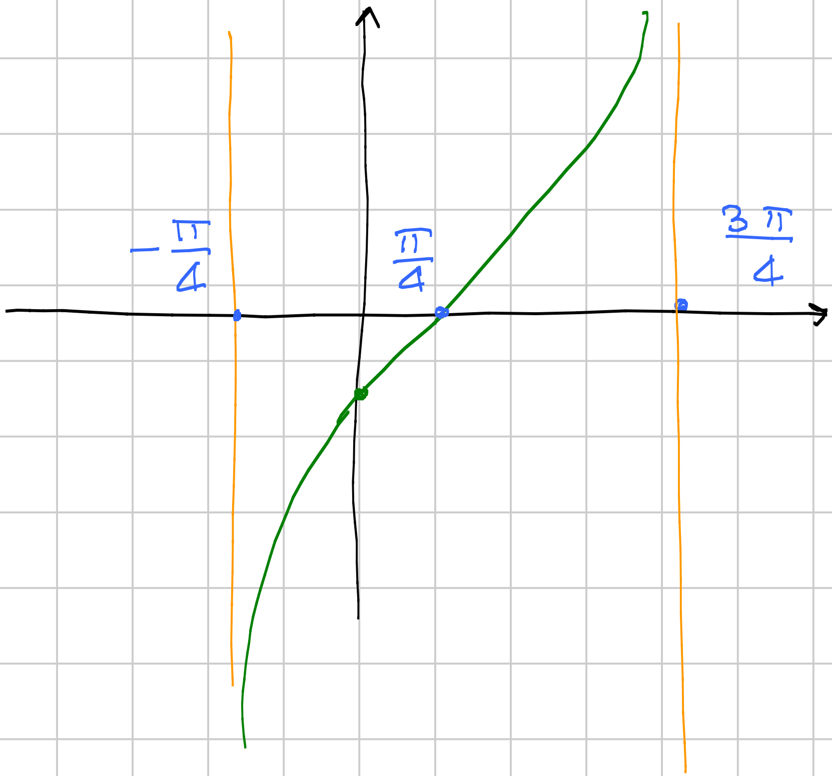
CONTROLLARE ....

STUDIARE È definita quando $t - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Int. max. di esistenza:

$$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

LIFE SPAN : $\frac{3\pi}{4}$



La soluzione ha blow-up per $t = \frac{3\pi}{4}$

— o — o —

<u>Esempio 4</u>

$$\begin{cases} u' = \frac{t}{u} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{SEPARARE}}$ $\frac{du}{dt} = \frac{t}{u}$

$$u\,du = t\,dt$$

$\boxed{\text{INTEGRARE}}$ $\int u\,du = \int t\,dt$ $\quad \frac{u^2}{2} = \frac{t^2}{2} + C$

$\boxed{\text{RICAVARE}}$ $\quad u^2 = t^2 + c \qquad u = \pm\sqrt{t^2+c}$

$\boxed{\text{DETERMINARE } c}$ $\quad u(0) = 1 \qquad 1 = \sqrt{c} \Rightarrow c = 1$

Sol. pb. di Cauchy : $\quad u(t) = \sqrt{t^2+1}$

$\Rightarrow$ Nessun problema $\Rightarrow$ esistenza globale per tempi positivi e negativi

— o — o —

Esempio 5 $\quad \begin{cases} u' = -\dfrac{1}{u} \\ u(0) = 3 \end{cases} \qquad \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{u}$

$$u\,du = -dt$$

integro: $\quad \dfrac{u^2}{2} = -t + c \quad \Rightarrow \quad u^2 = -2t + c$

$$u(t) = \pm\sqrt{c-2t}$$

Ricavo c : $\quad u(0) = 3 \qquad \sqrt{c} = 3 \quad \Rightarrow \quad c = 9$

Soluz. pb. di Cauchy: $u(t) = \sqrt{9-2t}$

Definita quando $9-2t \geq 0 \Rightarrow 2t \leq 9 \Rightarrow t \leq \frac{9}{2}$

Int. max. di esistenza: $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$

↑ Tempo di vita

Quando $t \to \frac{9}{2}^-$

abbiamo che $u(t) \to 0$

(NO BLOW-UP)

ma $u'(t) \longrightarrow -\infty$

$\Rightarrow$ BREAK-DOWN