# ANALISI MATEMATICA I - LEZIONE 078

Titolo nota 22/12/2010

**Integrali impropri**

Assoluta integrabilità. Per integrali impropri monoproblema si ha che

$$\int_E |f(x)|\,dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_E f(x)\,dx \text{ converge}$$

$$\int_E |f(x)|\,dx = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_E f(x)\,dx \text{ BOH}$$

Esempio 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+3}\,dx$ Unico problema: $+\infty$

Integranda $f(x)$ ha segno variabile

Studio $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2+3}\,dx$ a questo applico il confronto semplice:

$$\frac{|\cos x|}{x^2+3} \le \frac{1}{x^2+3} \quad \text{per ogni } x \ge 0.$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3}\,dx$ converge per confronto asintotico con l'integrale di $\frac{1}{x^2}$ con unico problema a $+\infty$

$\Downarrow$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2+3}\,dx$ converge per confronto tra integrande $\ge 0$

$\Downarrow$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+3}\,dx$ converge per assoluta integrabilità.

Da non dire e non pensare nemmeno (achtung!)

$$\frac{\cos x}{x^2+3} \le \frac{1}{x^2+3} \quad \text{per ogni } x \ge 0$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3}\,dx$ converge, $\boxed{\text{quindi}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+3}\,dx$ converge per confronto

No! Il confronto vale soltanto quando si hanno integrande $\ge 0$.

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$ Ci sono 2 problemi: $x=0$ e $x=+\infty$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. Il secondo lo gestisco come prima

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ converge (perchè $\frac{3}{2}>1$) $\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}\,dx$ converge

confronto fra integrande $\geq 0$

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$ converge

Considero ora $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$. Intanto l'integranda è $\geq 0$ (ovunque, ma basta vicino a $x=0$, dove c'è il problema)

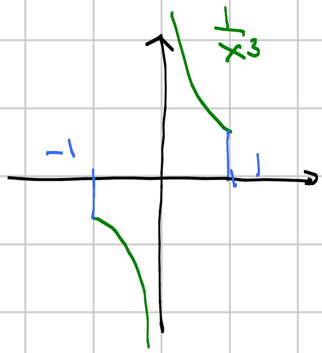
Brutale: $\dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}} \sim \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ per $x\to 0$ $\Rightarrow$ convergenza

Rigoroso: confronto asintotico con $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ldots = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \ldots$

— o — o —

Esempio 3 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$ se uno fa la primitiva e sostituisce gli estremi viene 0. Non va bene perchè è improprio e bisogna spezzarlo

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx}_{\text{Diverge a } -\infty} + \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx}_{\text{Diverge a } +\infty}$$

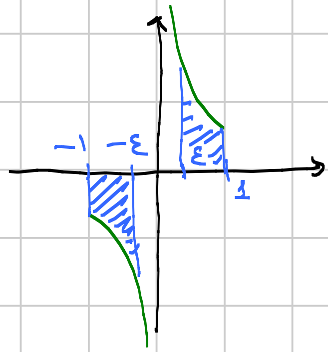



Per definizione l'integrale globale è indeterminato.

Osservazioni: se io faccio

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx \right) = 0$$

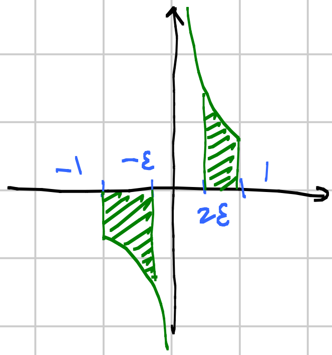
(i 2 pezzi sono finiti e si cancellano per simmetria)




$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left( \left[ -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} \right]_{-1}^{-\varepsilon} + \left[ -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} \right]_{\varepsilon}^{1} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left( \cancel{-\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon^2}} + \cancel{\frac{1}{2}1} + \cancel{-\frac{1}{2}1} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon^2}} \right) = 0$$

Ora faccio il "buco" tra $-\varepsilon$ e $2\varepsilon$. L'ampiezza del buco è $3\varepsilon$, quindi $\to 0$. Faccio lo stesso conto:




$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^3}\,dx+\int_{2\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^3}\,dx\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_{-1}^{-\varepsilon}+\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_{2\varepsilon}^{1}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon^2}+\cancel{\frac{1}{2}\cdot 1}-\cancel{\frac{1}{2}\cdot 1}+\frac{1}{2}\frac{1}{4\varepsilon^2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}=-\infty$$

Esercizio: trovare un "modo di fare il buco" in modo che l'ampiezza tenda a 0, ma l'integrale tenda a 2011.

<u>Fatto generale</u>: se l'integrale è fatto da tutti pezzi convergenti, il risultato del limite è sempre lo stesso purché l'ampiezza del buco tenda a 0 (il risultato è il valore dell'integrale)
Se invece ho un pezzo che diverge a $+\infty$ e uno che diverge a $-\infty$, allora buchi diversi producono al limite risultati diversi (anche se l'ampiezza va a zero).

—o—o—o—

Se il problema è in un punto diverso da zero? Si riporta in $x=0$ mediante cambio di variabili!!

<u>Esempio 4</u> $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$ il problema è in $x=2$.

Abbastanza brutale: $y=x-2$. Quando $x=2$ ho $y=0$ $\quad dy=dx$
Quando $x=3$ ho $y=1$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy$, quindi converge. La brutalità sta nell'uso dell'integrazione per sostituzione con gli integrali impropri, che però si giustifica molto facilmente

$$\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{x-2}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{2+\varepsilon}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x-2}}\overset{\boxed{y=x-2}}{=}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dy}{\sqrt{y}}=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

a $\varepsilon$ fisso è un integrale proprio

<u>Tabellina</u> Dato un intervallo $[a,b]$ ho che

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx \quad \begin{matrix} \nearrow \text{converge per } \alpha<1 \\ \searrow \text{diverge per } \alpha\geq 1 \end{matrix}$$

Infatti con la sostituzione $y=x-a$ diventa

$$\int_0^{b-a} \frac{1}{y^\alpha}\,dy \qquad \text{con problema in } y=0$$

Analogamente

$$\int_a^b \frac{1}{|b-x|^\alpha}\,dx = \int_a^b \frac{1}{|x-b|^\alpha}\,dx \quad \begin{matrix} \nearrow \text{converge per } \alpha<1 \\ \searrow \text{diverge per } \alpha\geq 1 \end{matrix}$$

Sostituzione: $y=b-x$ ... (occhio che $dy=-dx$).

— o — o —

<u>Esempio 5</u>

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\log x}\,dx = \int_1^2 + \underbrace{\int_2^{+\infty}}$$

converge: c'è $x^2$ e $\log x$ aiuta!
confronto asintotico con $\frac{1}{x^2}$
e viene un caso limite

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2\log x}\,dx$$

Pongo $y=x-1$ $\quad dy=dx$
Quando $x=1$ ho che $y=0$
Quando $x=2$ ho che $y=1$

Diventa:

$$\int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2\log(y+1)}\,dy$$

Brutale: $\dfrac{1}{\underbrace{(y+1)^2}_{\sim 1}\underbrace{\log(1+y)}_{\sim y}} \sim \dfrac{1}{y} \Rightarrow$ diverge.

Rigoroso: C.A. con $g(y)=\frac{1}{y}$: $\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{f(y)}{g(y)} = \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{1}{(y+1)^2}\,\frac{y}{\log(1+y)} = 1$

$\neq 0$
$\neq +\infty$

---