ANALISI MAT. 1 LEZIONE 2

Titolo nota 30/09/2008

INSIEME DELLE PARTI Sia A un insieme. L'insieme delle parti di A è l'insieme $\mathcal{P}(A)$ costituito da tutti i sottoinsiemi di A.

Esempio $A = \{1, f\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \{1\}, \{f\}, \emptyset, A \}$$
$$= \{ \{1\}, \{f\}, \emptyset, \{1, f\} \}$$

$B = \{3, 7, a\}$. $\mathcal{P}(B) = \{ \underset{\text{0 el.}}{\emptyset}, \underbrace{\{3\}, \{7\}, \{a\}}_{\text{sottoinsiemi da un elem.}}, \underbrace{\{3,7\}, \{3,a\}, \{7,a\}}_{\text{sottoinsiemi da 2 elem.}}, \underset{\text{da 3 el.}}{B} \}$

Esercizio Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con k el. ?

Sono 2^k

$$\overbrace{\underset{\text{SI}}{\times} \quad \times \quad \underset{\text{SI}}{\times} \quad \underset{\text{SI}}{\times} \quad \times \quad \dots \quad \underset{\text{SI}}{\times}}^{k \text{ elementi di } A} \qquad \text{ALTRI NO}$$

Per ogni el. ho 2 scelte: metterlo nel sottoinsieme oppure no.
Ho quindi 2^k possibili scelte.

Esercizio 2 Sia $a \in A$ con A che ha k elementi.
Quanti sono i sottoinsiemi di A che contengono a ?
Sono 2^{k-1} perché per a ho scelto SI, per gli altri k-1 elementi posso scegliere SI / NO

—o—o—

CARDINALITÀ $|A|$ = numero di el. dell'insieme A
(A: INSIEME) (cardinalità dell'insieme)

Talvolta si indica anche con $\# A$

Esempio $\underbrace{|A| = k}_{\text{IPOTESI}} \xRightarrow{\text{IMPLICAZIONE}} \overbrace{\underbrace{|\mathcal{P}(A)|}_{\substack{\text{cardinalità dell'insieme delle parti} \\ = \text{numero dei sottoinsiemi di } A}} = 2^k}^{\text{TESI}}$

PRODOTTO CARTESIANO DI 2 INSIEMI

Siano A e B 2 insiemi

Il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie (a,b) in cui $a \in A$ e $b \in B$

$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A,\ b \in B \}$$

1ª coord. in A   2ª coord. in B

Esempio $A = \{1,3\}$ $B = \{1,2,a\}$

$$A \times B = \{ (1,1), (1,2), (1,a), (3,1), (3,2), (3,a) \}$$

Esercizio Se $|A| = m$ e $|B| = n$, allora $|A \times B| = m \times n$
(ogni el. di A lo posso accoppiare a ogni el. di B).
Detto altrimenti

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Oss. Il prod. cartesiano è costituito da coppie ORDINATE, cioè $(1,2)$ è diverso da $(2,1)$

Esempio $A = \{1,2,b\}$

$$A \times A = \{ (1,1), (1,2), (1,b), (2,1), (2,2), (2,b), (b,1), (b,2), (b,b) \}$$

Esercizio 1 $A = \{1,2,b\}$

$B = \{ C \in \mathcal{P}(A) : b \in C \}$ = tutti i sottoinsiemi di A che contengono b

$|B| = 4$ $B = \{ \{1,b\}, \{2,b\}, \{b\}, \{1,2,b\} \}$

Esercizio 2 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2\}$

Tale che

$C = \{ (a,b) \in A \times B : a+b = 3 \}$ Descrive un sottoinsieme di $A \times B$

$A \times B = \{ (1,1), \boxed{(1,2)}, \boxed{(2,1)}, (2,2), (3,1), (3,2) \}$, $C = \{ (1,2), (2,1) \}$

FUNZIONI Cos'è una funzione? NON VE LO DICO

Operativamente una funzione sono 3 cose

* un insieme di partenza
* un insieme di arrivo
* una "legge" che ad ogni el. dell'insieme di partenza fa corrispondere un UNICO el. dell'insieme di arrivo

Come si indica? $f : A \longrightarrow B$

$\uparrow$ INSIEME PARTENZA $\quad \uparrow$ INSIEME ARRIVO

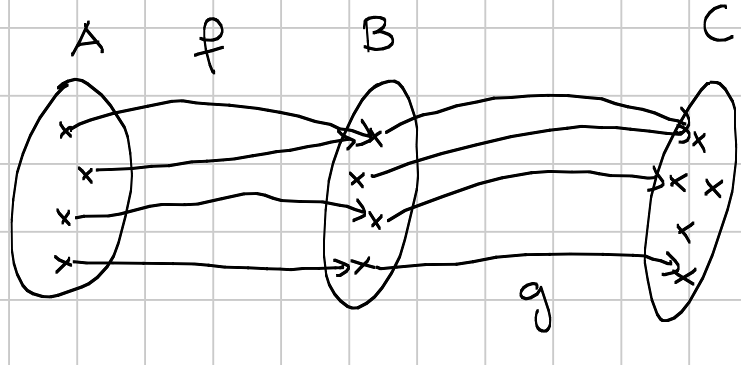
Per ogni $a \in A$ si indica con $f(a)$ l'el. di B (quindi $f(a) \in B$) che la legge produce a partire da a.

GRAFICO DI UNA FUNZIONE. Data $f : A \to B$ si dice grafico il sottoinsieme di $A \times B$ costituito dalle coppie (a,b) in cui $b = f(a)$. In simboli

$$\text{Grafico}(f) = \{ (a,b) \in A \times B \; : \; b = f(a) \}$$

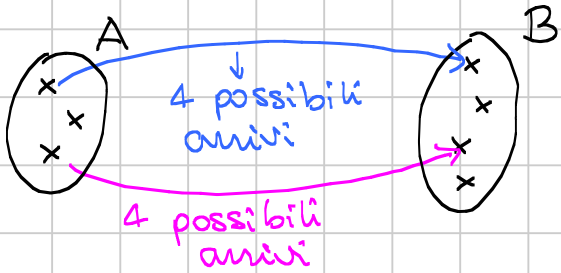
COMPOSIZIONE DI FUNZIONI $f : A \to B$, $g : B \to C$.

La composizione è la funzione $g \circ f$ che ad ogni elemento $a \in A$ fa corrispondere l'elemento $g(f(a))$ ottenuto partendo da a e facendo "prima f e poi g".



Osservazione Per definire la composizione serve che l'insieme di arrivo della + interna sia l'insieme di partenza della + esterna

Esercizio Sia $|A| = m$ e $|B| = n$. Quante sono le funzioni $f : A \to B$



Ogni freccia che parte da A ha n possibili arrivi

$$\underbrace{\underset{\uparrow\,1^a\text{ FR.}}{n} \cdot \underset{\uparrow\,2^a\text{ FR}}{n} \cdot \ldots \cdot \underset{\uparrow\,\text{ULTIMA FRECCIA}}{n}}_{m \text{ fattori}} = n^m = |B|^{|A|}$$

Esercizio

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \sin x$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad h(x) = 3^x$

$$h(f(g(x))) = 3^{\sin^2 x}$$

$g(x) = \sin x \qquad f(g(x)) = \sin^2 x$

$g(h(f(x))) = \sin(3^{x^2}) \qquad h(f(x)) = 3^{x^2}$

$f(h(g(x))) = [3^{\sin x}]^2 = 9^{\sin x}, \qquad h(g(x)) = 3^{\sin x}$

$h(g(f(x))) = 3^{\sin(x^2)}.$

— o —

Esercizio HARD. Quanto fa

$$|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| \quad ?$$