[B1] Determinare l'espressione analitica della rotazione di 90° in verso orario intorno al punto $(3, 4)$ del piano cartesiano.

Intorno all'origine: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-4 \\ -x+3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y-1 \\ -x+7 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(x, y) \to (y-1, -x+7)}$$

(Verificare qualcosa!)

[B2] Determinare per quali valori del parametro reale a vale la disuguaglianza

$$2x^2 + ay^2 \geq 14xy \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$2x^2 + ay^2 - 14xy \geq 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -7 & a \end{pmatrix}$$

La forma deve essere semi-def. positiva. Un autovalore positivo c'è di sicuro, grazie al 2 in alto a sx. Quindi

semi-def. pos. $\iff$ Det ≥ 0 $\iff$ $2a - 49 \geq 0$ $\iff$ $\boxed{a \geq \frac{49}{2}}$

— o — o —

[L1] Consideriamo nello spazio i punti $P = (5,1,0)$, $Q = (6,1,0)$, ed il piano π di equazione $x - 2y + 3z = 7$.

(a) Determinare la proiezione di P su π.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per P e Q e perpendicolare a π.

(a) retta per P e $\perp$ al piano : $(5,1,0) + t(1,-2,3)$
$= (5+t,\ 1-2t,\ 3t)$

Intersezione:

$5+t-2(1-2t)+3\cdot 3t = 7 \rightsquigarrow 5+t-2+4t+9t = 7$

$14t = 4 \qquad t = \frac{2}{7}$

Punto di intersezione: $\boxed{\left(\frac{37}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)}$ (verificare qualcosa!)

(b) Piani perpendicolari $\Leftrightarrow$ "coeff. (a,b,c)" perpendicolari

$Q - P = (1,0,0)$

Quindi (a,b,c) deve essere $\perp$ a $(1,0,0)$ e $(1,-2,3)$

Si vede ad occhio che $(0,3,2)$ va bene.

Equazione piano: $\boxed{3y + 2z = 3}$ (verificare!)

ottenuto imponendo il passaggio per P (o Q)

— o — o —

[L2] Determinare, al variare dei parametri reali a e b, la forma canonica di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

- Se $a \neq 1$ e $a \neq 2$ la matrice ha 3 autovalori distinti, quindi è diagonalizzabile (indipendentemente da b) e la sua forma di Jordan è

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} a \neq 1 \quad a \neq 2 \\ b \text{ qualunque} \end{matrix}}$$

- Se $a = 1$, allora $A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il rango dipende da b.

→ Se $b = 1$, allora $m_a(1) = m_g(1) = 2$ quindi la forma di Jordan è

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{a = 1, b = 1}$$

→ Se $b \neq 1$, allora $m_g(1) = 1$ e $m_a(1) = 2$, quindi Jordan è

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{a = 1, b \neq 1}$$

- Se $a = 2$, allora $A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il rango dipende da b

→ Se $b = 0$, allora $\lambda = 2$ ha molt. alg. = molt. geom. = 2 e quindi la forma di Jordan è

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{a = 2 \quad b = 0}$$

→ Se $b \neq 0$, allora $\lambda = 2$ ha molt. alg. $= 2$ e molt. geom. $= 1$ e quindi la forma di Jordan è

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{a = 2, b \neq 0}$$

—— o —— o ——