

• $x^2 + y^2 = f(x, y)$ inf./sup su \mathbb{R}^2

- GUARDO COSA FA A $+\infty$

$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f = +\infty$

perché uso le coordinate polari e ho

$\rho^2 (\underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_1) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} +\infty$

$\Rightarrow \sup = +\infty$

perché

$f(x, 0) = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} +\infty$

\Rightarrow ho $\min_{\mathbb{R}^2} f$

W.G.

Il minimo è un punto stazionario?

$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$

$\hookrightarrow f = 0 \leftarrow$ minimo, è solo

• $f(x, y) = x^2 - y^2$ sup/inf su \mathbb{R}^2

$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} x^2 - y^2 = \nexists$

$f(x, 0) = +\infty$

$f(0, x) = -\infty$

$\Rightarrow \begin{matrix} \sup = +\infty \\ \inf = -\infty \end{matrix}$

• $f(x, y) = x^4 + y^4 - xy$ inf/sup su \mathbb{R}^2

$\sup f = +\infty \rightarrow f(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$

$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f = +\infty$

perché in coordinate polari ho:

$\rho^4 (\underbrace{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}_{\geq c > 0}) - \rho^2 \sin \theta \cos \theta \geq c \rho^4 - \rho^2 \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} +\infty$

perché è una funzione continua strettamente > 0 su un compatto

$\Rightarrow \exists \min_{\mathbb{R}^2} f$ (che è un punto stazionario)

$\begin{cases} 4x^3 - y = 0 \\ 4y^3 - x = 0 \end{cases}$

$y = 4x^3$
 $4^4 x^9 - x = 0$

$\Rightarrow x = 0, y = 0$

oppure $4^4 x^8 = 1$

$x = \pm \frac{1}{2}$
 $x = -\frac{1}{2}$

$y = \pm \frac{1}{2}$
 $y = -\frac{1}{2}$

$f(0, 0) = 0$

$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$ minimo con 2 punti di minimo

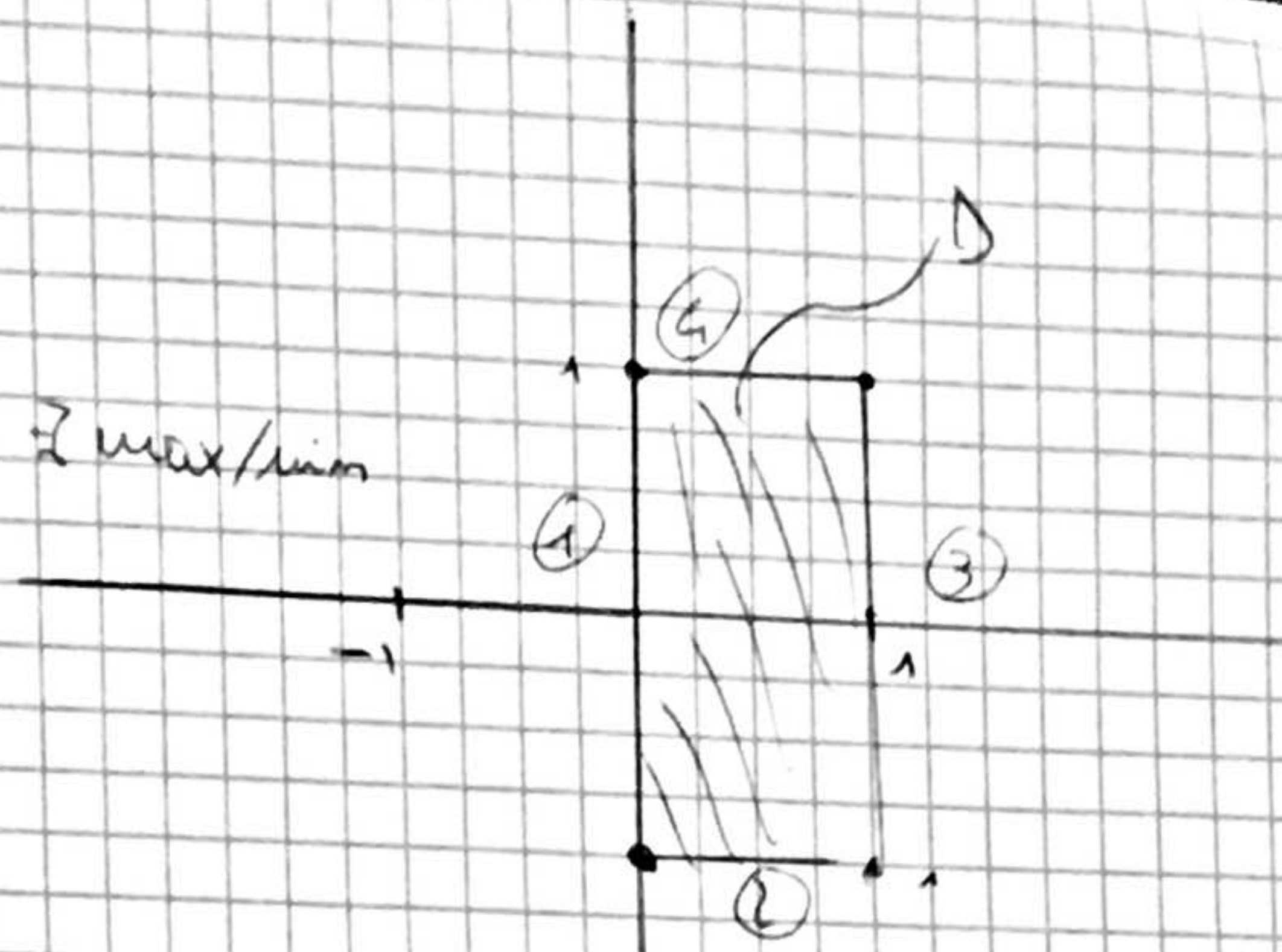
ESERCIZIO PAG 68

$$f(x, y) = |x - e^y|$$

$$D = \{x \in [0, 1], y \in [-1, 1]\}$$

	-1, 1
0	(0, -1) (0, 1)
1	(1, -1) (1, 1)

D è limitato \Rightarrow \exists max/min



Studio $g(x, y) = x - e^y$

PUNTI STAZIONARI INTERNI

$$\nabla g = (1, -e^y) = (0, 0)$$

non ci sono punti staz. perché

- Bordo \rightarrow lo parametrizzo

$$\gamma_1 = (0, t) \quad -1 < t < 1 \rightarrow g_1 = -e^t$$

ha max (0, 0) $g = -1$ min (0, 1)

$$\gamma_2 = (t, -1) \quad 0 < t < 1 \rightarrow \text{max in } (1, -1)$$

$$g_2(t, -1) = t - \frac{1}{e} \quad \text{min } (0, -1)$$

$$\gamma_3 = (1, t) \quad -1 < t < 1 \rightarrow g_3 = 1 - e^t$$

max (1, -1) min (1, 1)

$$\gamma_4 = (t, 1) \quad 0 < t < 1 \quad g_4 = t - e$$

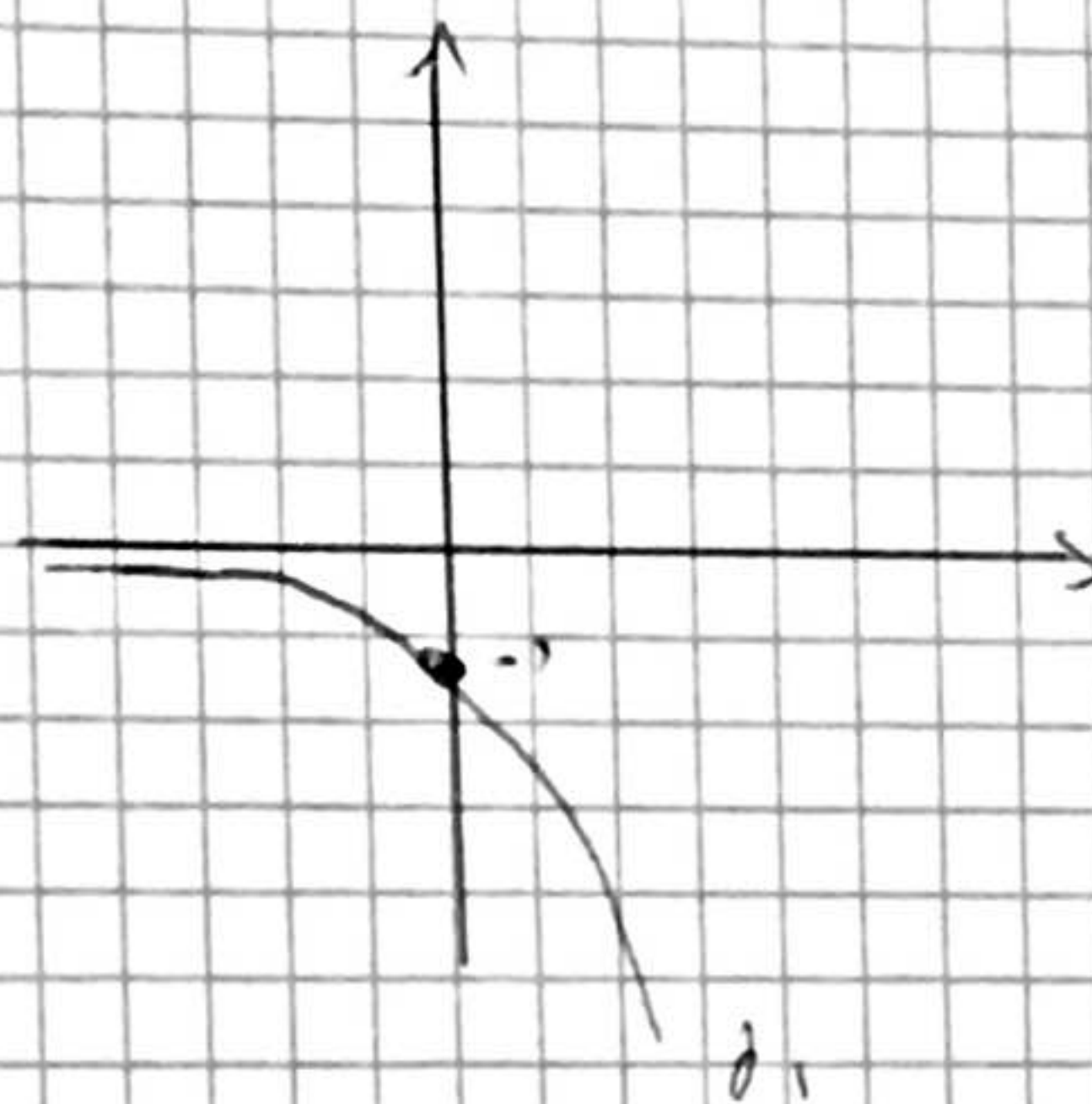
max (1, 1) min (1, 0)

CANDIDATI MAX / MIN DI G

$$(0, 0) \quad (1, -1) \quad (1, -1) \quad (1, 1)$$

$$(0, 1) \quad (0, -1) \quad (1, 1) \quad (1, 0)$$

Su $f(x, y)$ il max è (0, 1) $\rightarrow f(0, 1) = e$ 1 pt.
il min è (1, 0) $\rightarrow f(1, 0) = 0$ ∞ pt.



$$f(x, y) = x^2 + \arctan(xy) \quad \text{max/min su } \mathbb{R}^2$$

$$f(x, 0) = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$$

$$f\left(-\frac{1}{x}, x^2\right) = \frac{1}{x^2} + \arctan(-x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Sup} = +\infty$$

$$\text{inf} = -\pi/2$$

$$f(x, y) = x^4 + y^2 \rightarrow \text{uso il parallelogramma degli esponenti che}$$

$$\text{mi da } x^4 = v^2 \rightarrow v^2 + y^2 \rightarrow +\infty \quad v^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

$$\text{Sup} = +\infty$$

MINIMO \rightarrow P.C. STAZ.

$$\nabla f = (0, 0)$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (0, 0)$$

è minimo

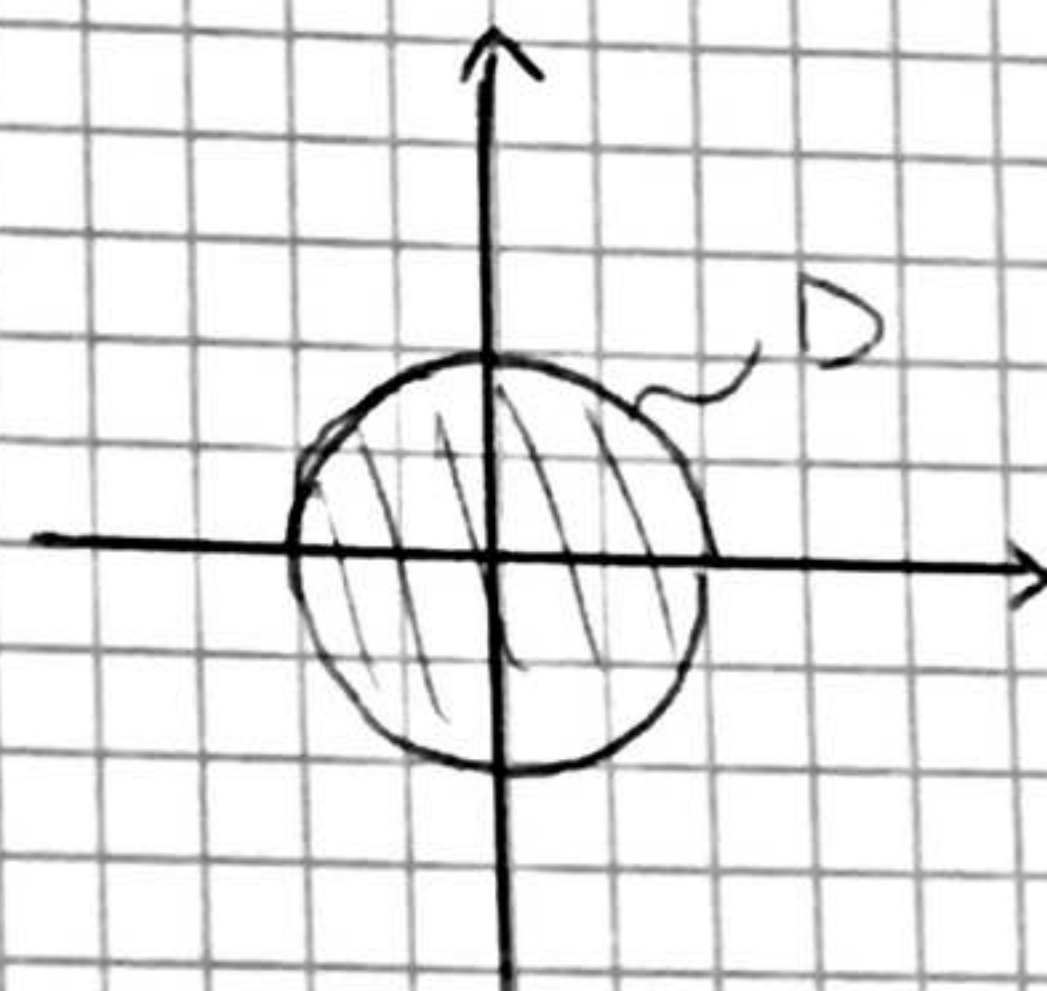
$$f(x, y) = 4 - x^2$$

$$D = \{x^2 + y^2 \leq 4\} \rightarrow \text{è una circonferenza}$$

\Downarrow w

\exists max/min

Studio $f(x) = 4 - x^2$



• PUNTI SIAZ. INTERNI

$$\nabla g(x) = (0, 0) \rightarrow (1, -2x) \neq 0, 0 \quad \text{Non ce ne sono}$$

• BORDO \rightarrow MOLTIPLICATORI

• PUNTI SINGOLARI $\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ + 2y = 0 \end{cases} \quad (0, 0) \leftarrow \text{il minimo di } f$

$(x, y) \in D$

PUNTI DI TAGLIO \Rightarrow non ne abbiamo

MOLTIPLICATORI

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda y \\ -2x = 2\lambda x \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} &x = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2 \\ &x \neq 0 \Rightarrow 2\lambda = -2 \rightarrow -2y = 1 \rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ &\quad \quad \quad x^2 + \frac{1}{4} - 2 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

PUNTI CANDIDATI DI $g \quad g(0, 0) = 0$

$$(0, \pm 2) \Rightarrow g(0, -2) = -2 \quad g(0, 2) = 2$$

$$\left(\pm \frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow g\left(\pm \frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{15}{4} = -\frac{17}{4} \leftarrow \text{minimo di } f$$

PUNTO DI MAX DI f : $\left(\pm \frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow f = \frac{17}{4} \quad 2 \text{ pti di max}$

PUNTI DI MIN DI f : $f(0, 0) = 0 \rightarrow (0, 0) \text{ è minimo}$
 ∞ pti di minimo

Quanti punti di minimo?

$$\begin{cases} 4 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 1 + 16 = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

\leftarrow i punti di minimo sono infiniti

$$x^2 + y^2 + 3xy \quad \sup / \inf \quad m \quad 117$$

Noto che $f(x, x) = 5x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \sup = +\infty$
 $f(-x, x) = -x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty \Rightarrow \inf = -\infty$

C' è un pto stationario

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \rightarrow y = -2/3 x \\ 2y + 3x = 0 \rightarrow \frac{5}{3} x = 0 \end{cases} \quad x = y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2xy$$

$$f(x, x) = 4x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \sup = +\infty$$

$$f(x, -x) = 0$$

$$\inf = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2y + 2y = 0 \end{cases}$$

$$x = y = 0$$

$(0, 0)$ è p.t. minimo

$\lim_{x^2+y^2+z^2 \rightarrow \infty} x+y+z \rightarrow f(x, 0, 0) = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow$ il limite N.E.
 $f(-x, 0, 0) = -x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$

- Sia $D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq x, z \leq 0\}$

$$f(y, y, 0) = 2y \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow \text{limite N.E.}$$

$$f(0, 0, -z) = -z \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} -\infty$$

- Sia $D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq y \leq z, 0 \leq x \leq z\}$

$$f(0, 1, z) = 1+z \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \text{limite } +\infty$$

$$f(z, z, z) = 3z \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} +\infty$$

- Sia $D_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \geq 1\}$

$$f(0, 0, z) = z \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$f(x, 0, x) = 2x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

\Rightarrow il limite non esiste.

$$f(0, 0, 1) = 1$$

- Sia $D_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq y \leq z \leq x\}$

$$f(x, 1, x) = 2x+1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

\Rightarrow il limite $+\infty$

$$f(z, z, z) = 3z \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$- D_5 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 1, 0 \leq y \leq z \leq 1/x \}$$

$$f(1, 0, z) = 1 + z \rightarrow \infty$$

$$f\left(\frac{1}{z}, z, z\right) = 1 + 2z \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{il limite, } z \rightarrow \infty$$

$$f\left(x, 0, \frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$o \quad f(x, y, z) = x^4 - y^2 + z^2 \quad \text{su } \mathbb{R}^3$$

$$f(x, 0, 0) = x^4 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

\Rightarrow il limite non esiste

$$f(0, y, 0) = -y^2 \xrightarrow{y \rightarrow \infty} -\infty$$

$$\text{Sia } D_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq x, z \leq 0 \}$$

$$f(x, 0, 0) = x^4 \rightarrow +\infty$$

$$f(x, x, 0) = x^4 - x^2 \rightarrow +\infty$$

$$f(0, 0, -z) = z^2 \rightarrow +\infty$$

\Rightarrow il limite $\bar{\infty}$

$$x^2 - x^2 \leq x^4 - y^2 + z^2 \leq x^4$$

$$\text{Sia } D_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq y \leq z, 0 \leq x \leq z \}$$

$$f(0, 1, z) = z^2 - 1 \xrightarrow{z \rightarrow \infty} +\infty$$

$$f(z, z, z) = z^4 - z + z^2 \xrightarrow{z \rightarrow \infty} +\infty$$

\Rightarrow il limite $\bar{\infty}$

$$\text{Sia } D_3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \geq 1 \}$$

$$f(0, 0, 1) = 1$$

$$f(x^4, 0, 0) = x^4 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$$

\Rightarrow N.E

$$- D_4 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq y \leq z \leq x \}$$

$$f(x, 1, x) = x^4 + x^2 \rightarrow \infty$$

$$f(z, z, z) = z^4 - z^2 + z^2 \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \infty$$

di min locale.

ESERCIZIO PAG 80

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2y^2$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x + 6y^2 & 12xy \\ 12xy & -6y + 6x^2 \end{pmatrix}$$

NOTA

$$f_x = 3x^2 + 6xy^2 \rightarrow f_{xx} = 6x + 6y^2$$

$$f_{xy} = 12xy \quad f_y = -3y^2 + 6x^2y \rightarrow f_{yy} = -6y + 6x^2$$

PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} 3x^2 + 6xy^2 = 0 \\ -3y^2 + 6x^2y = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{se } y=0 \rightarrow x=0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y = 2x^2 \end{cases}$$

$$3x^2 + 24x^3 = 0 \rightarrow 8x^3 = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Punti sono } A = (0, 0) \quad B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$A = (0, 0) \rightarrow H_f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{guardo } f$$

$$f(0, y) = -y^3 \rightarrow \text{maximo}$$

$$f(x, 0) = x^3 \rightarrow \text{minimo}$$

SELLA

$$B \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow H_f \begin{pmatrix} -3/2 & -3 \\ -3 & -3/2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\det = \frac{9}{4} - 9 = -\frac{27}{4}$$

$$tr = -3$$

indef

SELLA

SELLA

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2 y^2$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2-2y^2 & -2xy \\ -2xy & 2-2x^2 \end{pmatrix}$$

DERIVATE $\rightarrow f_x = 2x - 2xy^2 \rightarrow f_{xx} = 2 - 2y^2$
 $f_{xy} = -2xy$
 $f_y = 2y - 2yx^2 \rightarrow f_{yy} = 2 - 2x^2$

PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} 2x - 2xy^2 = 0 \\ 2y - 2yx^2 = 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow 1) x = xy^2 \rightarrow y = \pm 1$$

$$y = -1 \rightarrow -2 + 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \pm 1$$

$$y = +1 \rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \pm 1$$

3 punti sono $A = (0, 0)$ $B = (-1, 1)$ $C = (-1, -1)$ $D = (1, 1)$ $E = (1, -1)$

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det = 4$$

$$\text{tr} = 2$$

$\Rightarrow H_f$ def. positiva $\Rightarrow (0, 0)$

minimo
locale

$$H_f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det = -4$$

$$\text{tr} = 0$$

$\Rightarrow H_f$ indefinita \Rightarrow SELLA

$$H_f(C) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det = 4$$

$$\text{tr} = 0$$

$\Rightarrow H_f$

\Rightarrow

$$\circ \text{Sim}(x+y) = x+y - \frac{(x+y)^3}{6} + o((x+y)^3)$$

Poiché il termine del primo ordine è presente allora

il gradiente calcolato nell'origine non è nullo quindi

non è stazionario

• Determinazione di punti stazionari della funzione:

$$f(x, y) = x + x^2 + y^4 \quad \text{su } \mathbb{R}^2$$

PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} 1 + 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$$

$$x = -1/2 \quad y = 0$$

$$A(-1/2, 0)$$

MATRICE HESSIANA

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow H_f(A)$ è definita positiva

$\Rightarrow A$ è punto di minimo locale

STUDIO PUNTI DI MAX/MIN GLOBALE.

Si come è definito su tutto il piano allora studio il suo comportamento all'infinito

$$f(x, 0) = x + x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$$

$$f(0, y) = y^4 \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty$$

\Rightarrow W.G. ha $\min_{\mathbb{R}^2} f$

Il minimo è un punto stazionario

$$\bullet f(x, y) = x e^y - y e^x$$

PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^y - y e^x = 0 \rightarrow e^y - y x e^y = 0 \rightarrow e^y (1 - yx) = 0 \\ x e^y - e^x = 0 \rightarrow e^x = x e^y \end{cases}$$

$x=0 \rightarrow$ il sistema non ha soluzioni
 $x \neq 0 \rightarrow x = \frac{1}{y}$

\Rightarrow ha il punto $(1, 1)$

$$\Rightarrow A = (1, 1)$$

$$H_f = \begin{pmatrix} e^y - y e^x & e^y - e^x \\ e^y - e^x & x e^y - e^x \end{pmatrix}$$

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(H_f(A)) = 0$$

\Rightarrow la matrice è nulla allora non si può dire niente

$$f(x, y) = x \arctan y + y \arctan x$$

PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} \arctan y + y \frac{1}{1+x^2} = 0 \\ x \frac{1}{1+y^2} + \arctan x = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzione $(0, 0)$.

$$Hf = \begin{pmatrix} \arctan y + \frac{2y}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+x^2} & -\frac{2xy}{1+y^2} + \arctan x \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice
nella non
Si dire niente

STUDIO MAX/MIN GLOBALI

$$f(x, x) = x \arctan(x) + x \arctan(x) \rightarrow \infty \quad \text{per } x \rightarrow \infty \quad \text{Sup} = +\infty$$

$$f(0, y) = 0$$

$$f(x, -x) = x \arctan(-x) - x \arctan x =$$

$$= -2x \arctan(x) \rightarrow -\infty \quad \text{per } x \rightarrow -\infty \quad \text{Inf} = -\infty$$

ESERCIZIO PAG 81 (SVILUPPI DI TAYLOR)

Sviluppa fino all'ordine 4:

$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{Sim}(x+y^4) &= x+y^4 - \frac{x^3}{3!} + o((x+y^4)^4) \\ &= x+y^4 - \frac{x^3}{3!} + o((x^2+y^2)^2) \end{aligned}$$

Il termine al primo ordine è presente questo significa che il gradiente non si annulla \Rightarrow il punto non è stazionario

$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{Sim}(x^2+y^3) &= x^2+y^3 + o((x^2+y^3)^4) \\ &= x^2+y^3 + o((x^2+y^2)^2) \end{aligned}$$

In questo caso $(0,0)$ è un punto stazionario

$$f(x,0) = x^2 + o(x^4) \rightarrow f \text{ ha minimo in } 0$$

$$f(0,y) = y^3 + o(y^4) \rightarrow \text{non è né max né min.}$$

$$\begin{aligned} \bullet \exp(x+y^3+x^4) &= 1 + xy + y^3 + x^4 + \frac{x^2y^2}{2} + o((x+y^3+x^4)^4) \\ &= 1 + xy + y^2 + x^4 + \frac{x^2y^2}{2} + o((x^2+y^2)^2) \end{aligned}$$

In questo caso $(0,0)$ è stazionario

ma

$$f(x,0) = 1+x^4 \text{ e } (0,0) \text{ è un punto di max}$$

$$f(0,y) = 1-y^3 \text{ e } (0,0) \text{ non è né max né min.}$$