

Metodi Matematici e Statistici

Prova in itinere del 17/5/06

punteggio indicativo: es1-3pt,es2-3pt,es3-3pt,es4-5pt

Esercizio 1. Un pezzo meccanico di una macchina si è rotto. Bisogna capire se la rottura è avvenuta per uso scorretto della macchina oppure per un difetto di fabbricazione. Si sa che nel 60% dei casi già accaduti di rottura, la causa è stata un uso scorretto. Si sa inoltre che se la causa è un uso scorretto, la rottura del pezzo meccanico è accompagnata nell'80% dei casi da usura dell'impianto elettrico, mentre se la causa è un difetto di fabbricazione, solo nel 10% dei casi la rottura è accompagnata da usura dell'impianto elettrico. Non avendo rilevato, in quest'ultimo incidente, usura dell'impianto elettrico, che probabilità c'è che la rottura sia dovuta ad un cattivo uso?

Esercizio 2. Se $X \sim N(1, 3)$ e $Y \sim N(-1, 2)$ sono v.a. indipendenti, calcolare $P(3X - 2Y - 2 > 5)$.

Esercizio 3. Un ufficio fiscale vuole calcolare il guadagno medio annuale di un generico negozio di scarpe di media grandezza. Decide di far questo utilizzando i dati fiscali di un certo numero di negozi di quel tipo. Di quanti negozi ha bisogno per stimare il guadagno medio con una precisione di 10.000 euro e confidenza 88%? Supponiamo utilizzi come valore della deviazione standard quello preso da tabelle di negozi simili, ovvero 22.000 euro.

Esercizio 4. I gestori di una catena di negozi simili vogliono capire se il guadagno mensile medio di ciascun negozio cambia effettuando certi sconti. Dalle statistiche accumulate in regime senza sconti si sa che il guadagno mensile medio è di 55.000 euro con deviazione 8.000. Sperimentando il regime di sconti in 15 negozi scopre un guadagno medio sperimentale di 60.000 euro.

a) Al 95%, bisogna ritenere che questa differenza sia dovuta agli sconti o al caso?

b) Calcolare anche il valore p e rispondere alla domanda a) tramite l'uso di p .

c) Calcolare la potenza di questo test di verificare una variazione da 55.000 a 65.000.

1 Soluzioni

Soluzione 1. US =uso scorretto, $P(US) = 0.6$, E =usura impianto elettrico, $P(E|US) = 0.8$, DF =difetto fabbricazione, $P(DF) = 0.4$, $P(E|DF) = 0.1$.

$$P(US|E^c) = \frac{P(E^c|US)P(US)}{P(E^c)} = \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.48} = 0.25$$

$$\frac{0.2 \cdot 0.6}{0.48} = .25$$

essendo

$$\begin{aligned} P(E^c) &= P(E^c|US)P(US) + P(E^c|DF)P(DF) \\ &= 0.2 \cdot 0.6 + 0.9 \cdot 0.4 = 0.48 \end{aligned}$$

$$0.2 \cdot 0.6 + 0.9 \cdot 0.4 = .48$$

Soluzione 2.

$$3X - 2Y - 2 \sim N(3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2, 9 \cdot 3 + 4 \cdot 2) = N(3, 35)$$

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2 = 3.0$$

$$9 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 35.0$$

$$\begin{aligned} P(2X - 3Y + 1 > 5) &= 1 - \Phi\left(\frac{5-3}{\sqrt{35}}\right) = 1 - \Phi(0.33806) \\ &= 1 - 0.633 = 0.367 \end{aligned}$$

$$\frac{5-3}{\sqrt{35}} = .33806$$

$$1 - 0.633 = .367$$

Soluzione 3. $\delta = 10.000$, $1 - \alpha = 0.88$, $\sigma = 22.000$, $q_{1-\frac{\alpha}{2}} = q_{0.94} = 1.56$

$$n \geq \left(\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{22 \cdot 1.56}{10}\right)^2 = 11.779$$

$$\left(\frac{22 \cdot 1.56}{10}\right)^2 = 11.779$$

$$n = 12.$$

Soluzione 4. a) Confidenza 95%, $q_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$,

$$z = \frac{60.000 - 55.000}{8.000} \sqrt{15} = 2.4206$$

Test significativo.

$$\frac{60.000 - 55.000}{8.000} \sqrt{15} = 2.4206$$

b)

$$p = 2 - 2\Phi(|z|) = 2 - 2\Phi(2.4206) = 2 - 2 \cdot 0.992 = 0.016$$

e risulta $\alpha = 0.05 > 0.016$, quindi il test è significativo.

$$2 - 2 \cdot 0.992 = .016$$

$$c) d = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{55.000 - 65.000}{8.000} \sqrt{15} = -1.3553$$

$$\frac{55.000 - 65.000}{8.000} \sqrt{15} = -4.8412$$

$$\beta = \Phi(-4.8412 + 1.96) - \Phi(-4.8412 - 1.96) \sim \Phi(-2.8812)$$

$$= 1 - \Phi(2.8812) = 1 - 0.998$$

$$-4.8412 + 1.96 = -2.8812$$

$$-4.8412 - 1.96 = -6.8012$$

Potenza $1 - \beta = 0.998$.