Riassunto finale e identificazione di temi per l'esame

December 2, 2015

- Il corso ha riguardato equazioni differenziali stocastiche, con vari accenni e motivazioni circa modelli legati all'oncologia.
- Sulle equazioni differenziali stocastiche, abbiamo visto alcune definizioni ed enunciati di base ed abbiamo approfondito i legami con equazioni alle derivate parziali.

POSSIBILE APPROFONDIMENTO: *equazioni stocastiche con coefficienti del tipo*

$$b(x) = \nabla U(x)$$

con U *non regolare in* $x = 0$*, più precisamente* $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}\right)$*, e con opportune ipotesi per* $x \to 0$*. Sotto quali ipotesi possiamo dire che la soluzione non tocca* $x = 0$ *ed esiste unica globalmente? [Natura: SDE]*

VARIANTE CON PARTICELLE: sistemi con interazione del tipo

$$\nabla U\left(X_t^i - X_t^j\right)$$

con U *come sopra. Sotto quali ipotesi possiamo dire che le particelle non si toccano e la dinamica esiste unica globalmente? Esempio tipico:* $U(x) = 1/|x|^{\alpha}$*. [Natura: SDE]*

- I legami che abbiamo approfondito riguardano soprattutto le equazioni di Fokker-Planck (con qualche commento su Kolmogorov). Abbiamo dimostrato che la legge di ogni soluzione della SDE risolve Fokker-Planck in senso debole.

POSSIBILE APPROFONDIMENTO: teoremi di unicità per Fokker-Planck. Servirebbero ad esempio nella teoria mean field (si veda pagina 12 delle note "compattezza per processi a valori misure"). [Natura: PDE]

Anche teoremi di esistenza di soluzioni regolari di Fokker-Planck sono interessanti, ad esempio per poter stabilire (se c'è unicità) che le leggi delle SDE hanno densità.

- Abbiamo anche esaminato il legame tra la misura empirica di un sistema di copie indipendenti della SDE e la soluzione debole di Fokker-Planck, e la sua versione numerica con kernel smoothing.

- Questo conclude la prima parte, sul caso base, PDE lineari ed i sistemi indipendenti.
- La seconda parte mette in gioco gli elementi nuovi delle interazioni e della proliferazione.
- Inizialmente abbiamo visto un modello complesso (p. 39 e seguenti, delle "dispense") ed esaminato qualche elemento della teoria delle equazioni FKPP.

POSSIBILE APPROFONDIMENTO: scrivere il modello microscopico associato a segmenti semplificati del modello complesso ed esaminarne il limite macriscopico. [Natura: SDE-PDE]

POSSIBILE APPROFONDIMENTO: circa le equazioni tipo FKPP, la questione delle regioni invarianti è insidiosa. Ci sarebbero chiarimenti teorici da effettuare anche solo nel caso base di FKPP (si veda la dimostrazione a pagina 60 delle "dispense") e ci sarebbe da capire meglio cosa accade in presenza di termini di trasporto (si veda l'esempio numerico alle pp. 34-36). [Natura: PDE]

POSSIBILE APPROFONDIMENTO: teoremi rigorosi di unicità per l'equazione di Porous Media (essenziali per l'unicità del limite nel modello di particelle moderatamente interagenti), e teoremi rigorosi di convergenza delle PDE di tipo mean field alla PDE di tipo Porous Media. [Natura: PDE]

POSSIBILE APPROFONDIMENTO: scrivere delle note sull'approccio con la teoria dei semigruppi (lezioni 19 e 20). Un cenno di appoggio si trova nelle note della lezione 18. [Natura: SDE-PDE]

POSSIBILE APPROFONDIMENTO: lettura accurata della bozza di dispense non spiegata sulla proliferazione. Questo lavoro coinvolge un po' di studio di processi a salti. La compattezza della misura empirica è stata svolta usando il metodo dei semigruppi, ma ci sono varianti studiabili semplicemente tramite compattezza di misure. [Natura: processi stocastici, probabilità]

- A livello prettamente simulativo, e di confronto tra teoria e simulazioni, che problemi potremmo evidenziare?

POSSIBILE APPROFONDIMENTO: simulazioni nel caso della proliferazione e confronto con la PDE corrispondente. [Natura: numerico-stocastico]

POSSIBILE APPROFONDIMENTO: simulazioni 3D di cellule, con diffusione e interazione locale (tipo lez. 14). Spunto (C.R.): `require(rgl); x=rnorm(1000); y=rnorm(1000); z=rnorm(1000); plot3d(x, y, z, size=4, type="s", col=rainbow(1000) ,alpha=0.5)` *[Natura: numerico-stocastico]*