

1 Descrizione sommaria degli argomenti svolti a lezione, anno 2005

Lezione 1 (1/3, 2 ore). Introduzione al corso (testo: S. Ross, materiale complementare in rete alle pagine di Gubinelli e Flandoli, primo compito previsto per la settimana dell'11 Aprile). Si comincia dal Capitolo 3: oggetti del calcolo delle probabilità: esiti (eventi elementari), spazio degli esiti, eventi ed operazioni su di essi, probabilità e sue regole. Probabilità condizionale, formula di fattorizzazione, interpretazione con albero, esercizio 1.1 del 22/7/03.

Lezione 2 (2/3, 1 ora). Formula di Bayes. Soluzione dell'es. 5 del 17/5/03, con domanda preliminare: calcolare la probabilità che quel prodotto venga acquistato.

Lezione 3 (3/3, 2 ore). Viene ripreso l'es. 5 del 17/5/03 risolvendolo anche mediante albero. Spazi equiprobabili, principio di enumerazione, esercizio n. 19 del Ross. Permutazioni (applicazioni biunivoche), loro cardinalità $= n!$. Stringhe di 0-1 lunghe n : la loro cardinalità è 2^n ; il numero di quelle con k elementi pari ad uno è $\binom{n}{k}$, coefficiente binomiale. Definizione di indipendenza tra due eventi A e B , prima a partire dalla probabilità condizionale ($P(A) = P(A|B)$), poi nella forma simmetrica $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Assegnati per casa gli esercizi 1 (i, ii) del 4/6/02, gli esercizi 19 e 29 del Ross, facoltativi gli es. 31 (media difficoltà) e 27 (difficile) del Ross.

Lezione 4 (8/3, 2 ore). Esercitazione. Vengono risolti e commentati i punti i) e ii) dell'es. 1 del compito del 4/6/02 sia con l'approccio dell'albero delle possibilità sia tramite formula di fattorizzazione e Bayes. Esercizi 18, 20, 23, 24 del Ross.

Lezione 5 (9/3, 1 ora). Esercitazione. Risolti e commentati gli esercizi 34 e 27 del Ross. Osservazioni sulle probabilità condizionate: si comportano come probabilità. Consigliati gli esercizi 35, 36, 37, 38 e 41 del Ross. Inoltre il primo esercizio del compito del 1/9/02.

Lezione 6 (10/3, 2 ore). Inizio dello studio dei capitoli 4,5 del Ross. Variabili aleatorie. Due tipi: discrete e continue. Alcuni esempi di variabili aleatorie che si incontrano nella pratica. Variabili aleatorie discrete: loro descrizione tramite la massa (o distribuzione) di probabilità. Rappresentazione grafica della massa di probabilità e varie notazioni per descrivere una variabile discreta. Concetto di indipendenza di variabili aleatorie (nel caso discreto). Criterio per la verifica dell'indipendenza (due v.a. discrete sono indipendenti se la probabilità che entrambi prendano determinati valori è uguale al prodotto delle probabilità per le singole variabili). Esempio di calcolo della distribuzione della somma di due variabili aleatorie indipendenti. Es. suggerito: calcolare la distribuzione della somma di quattro v.a. indipendenti che prendono con uguale probabilità i valori 0 e 1.

Lezione 7 (15/3, 2 ore). Richiamo sul concetto di variabile aleatoria come funzione definita sullo spazio degli esiti, che ad ogni esito associa un numero; e sulla versione intuitiva della definizione, come grandezza aleatoria che assume certi valori con certe probabilità. Richiamo su v.a. di Bernoulli, $X \sim B(1, p)$, su

v.a. indipendenti, sui coefficienti binomiali (osservando alcuni fatti, ad esempio $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $0! = 1$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$).

Definizione di v.a. binomiale, $X \sim B(n, p)$: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Verifica che la somma è uno, usando il binomio di Newton. Teorema: date $X_1, \dots, X_n \sim B(1, p)$ indipendenti, posto $S = X_1 + \dots + X_n$, S risulta essere una $B(n, p)$. Dimostrazione, calcolando $P(S = k)$ come somma degli esiti con k successi, che sono $\binom{n}{k}$, ciascuno con probabilità $p^k (1-p)^{n-k}$.

Grafico della massa di probabilità binomiale. Esempio di una banca con 1000 correntisti, indipendenti, ciascuno con probabilità $1/5$ di presentarsi in un generico giorno; si deve calcolare la probabilità di avere più di 300 visite in un giorno.

Lezione 8 (16/3, 1 ora) Teorema degli eventi rari: se $X \sim \text{Bin}(n, p)$ con $n \rightarrow \infty$, $np = \lambda$ allora $P(X = k) \rightarrow e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, $k = 0, 1, \dots$. Definizione di v.a. di Poisson di parametro λ : $P(N = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, $k = 0, 1, \dots$. Teorema degli eventi rari come convergenza della distribuzione di v.a. Binomiali alla distribuzione di v.a. di Poisson. Approssimazione di Binomiali con Poisson.

Lezione 9 (17/3, 2 ore). Definizione di valor medio di una v.a. discreta; sua interpretazione grafica; esempi elementari; sua motivazione in relazione alla media aritmetica di una campione sperimentale ($\frac{1}{n} \sum x_i = a_1 \frac{n_1}{n} + \dots \sim \sum a_k p_k$). Valor medio di una trasformazione $f(X)$. Caso particolare: definizione di Varianza e sua interpretazione. Definizione di deviazione standard e sua interpretazione anche grafica. Simboli μ, σ^2, σ . Proprietà del valor medio: linearità (senza dimostrazione).

Lezione 10 (22/3, 2 ore). $\text{Var}[X] = E[X^2] - \mu^2$, con dimostrazione. Esempio di calcolo della varianza di una Bernoulli nei due modi. Teorema: X, Y indipendenti implica $E[XY] = E[X]E[Y]$. Corollario: X, Y indipendenti implica $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$. In generale, introdotta la Covarianza, vale $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$. Esercizio: calcolo di media e varianza di una binomiale, usando la rappresentazione come somma di Bernoulli indipendenti. Calcolo (un po' intuitivo) di media e varianza di una Poisson.

Dimostrazione del teorema. Funzione di massa congiunta e marginali. Relazione generale $p_X(a) = \sum_b p(a, b)$ ecc., relazione particolare $p(a, b) = p_X(a)p_Y(b)$ per v.a. indipendenti. Formula generale $E[g(X, Y)] = \sum_{a,b} g(a, b)p(a, b)$. Da questo volendo si potrebbe dimostrare la linearità.

Proprietà di concentrazione delle $B(n, p)$ con n grande (p non piccolo): σ è molto minore di n e di μ . Spiegazione dell'esercizio della banca.

Lezione 11 (23/3, 1 ora) Normalizzazione di una v.a.: se X ha valor medio μ e varianza σ^2 allora la v.a. $Z = (X - \mu)/\sigma$ ha media nulla e varianza unitaria. Dimostrazione. Funzione generatrice dei momenti (FGM) di una v.a. Definizione $\phi_X(t) = E[e^{tX}]$ e calcolo per le v.a. di Bernoulli. Proprietà principali: le derivate in zero della $\phi_X(t)$ danno il valor medio delle potenze di X : $\phi'(0) = E[X]$, $\phi''(0) = E[X^2]$, ecc..., la FGM della somma di due v.a. indipendenti è uguale al prodotto delle rispettive FGM. Dimostrazione di queste proprietà. Calcolo della FGM per la Binomiale usando il fatto che la Binomiale

è somma di Bernoulli. Calcolo diretto della FGM per la Poisson.

Lezione 12 (5/4, 2 ore) Esercitazione. Esercizio 2 del compito del 4/6/02 ed esercizio 2 del compito del 22/9/04, entrambe sulle v.a. discrete. Esercizio 37 a pag. 140 del Ross sulle proprietà del valor medio (difficile). Si è introdotta la funzione indicatrice di un evento A : la funzione indicatrice di A si scrive I_A : e' una v.a. discreta che prende valore 1 quando A si verifica e 0 altrimenti. Quindi $E[I_A] = P(A)$ e la v.a. I_A è distribuita come una Bernoulli di parametro $p = P(A)$. Esercizio 49 a pag 141 del Ross sulla correlazione: la correlazione di due v.a. X e Y è $\text{Corr}(X, Y) = \text{Cov}(X, Y)/(\sigma_X \sigma_Y)$ dove σ_X e σ_Y sono le dev. standard di X e Y rispettivamente. Si ha che $|\text{Corr}(X, Y)| \leq 1$ e inoltre $|\text{Corr}(X, Y)| = 1$ se e solo se c'è una relazione lineare tra X e Y , ovvero se e solo se esistono due numeri α, β tali che $Y = \alpha + \beta X$. Consigliati i seguenti esercizi del Ross. Da pag. 134 1,2,3,4*,5*,32,37*,38,39,40*,41,42*,45,49*,50,52. Quelli con l'asterisco devono considerarsi un pò più impegnativi. Da pag. 196 es. 15,16,18 (tutti sulla Poisson). Poi viene suggerito il seguente problema (risolto due giorni dopo in classe): Abbiamo una centrale telefonica con 1000 clienti. In un tipico minuto c'è probabilità pari a 1/50 che un utente richieda l'utilizzo di una linea per una telefonata. Quante linee deve avere la centrale per garantire il servizio con probabilità pari a 0.99?

Lezione 13 (6/4, 1 ora) Si inizia lo studio delle v.a. continue. Una v.a. X è (assolutamente) continua se la sua funzione di ripartizione F_X si scrive come l'integrale di una funzione $f_X(x) \geq 0$: $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x)dx$. La funzione $f_X(x)$ si chiama densità di probabilità e soddisfa: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. Definizione di valor medio per una v.a. continua $E[X] = \int x f_X(x)dx$ e inoltre il valor medio di una funzione generica di una v.a. continua: $E[g(X)] = \int g(x) f_X(x)dx$. Osservazioni sull'analogia tra operazioni sulle v.a. continue e le corrispondenti operazioni sulle v.a. discrete. Osservazione sul fatto che la funzione di ripartizione di una v.a. continua è una funzione continua e inoltre $f_X(t) = dF_X(t)/dt$ quando F è differenziabile.

Lezione 14 (7/4, 2 ore) Definizione di v.a. Uniforme. X è una v.a. uniforme in $[\alpha, \beta]$ se la sua funzione di densità è nulla fuori $[\alpha, \beta]$ ed è costante all'interno. Valor medio e varianza di una v.a. uniforme e calcolo della funzione generatrice dei momenti. Esercizi sulle v.a. continue definite tramite la densità: trovare la funzione di ripartizione, calcolare il valor medio. Esempio di come procedere per calcolare la densità di una v.a. definita in funzione di un'altra v.a. continua di cui si conosce la densità (vedere p. 117 del Ross). Si parte da X uniforme in $[0, 1]$ e si vuole trovare la densità di probabilità di $Y = X^2$. Passaggi chiave: determinare la F_Y e poi derivarla per ottenere f_Y .

Lezione 15 (12/4, 2 ore). Variabili aleatorie esponenziali. Formula $\int_a^b e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{\lambda}$. Determinazione della costante nella formula della densità. Formula $P(X > t) = e^{-\lambda t}$. Funzione di distribuzione cumulativa. Teorema sulla proprietà di mancanza di memoria: enunciato, interpretazione dell'enunciato (pensando all'istante aleatorio in cui accade un certo evento), dimostrazione. Calcolo della media, $\frac{1}{\lambda}$ (vale quindi $\lambda = \frac{1}{E[X]}$) e della varianza, $\frac{1}{\lambda^2}$ (quindi la deviazione

σ è pari alla media). Calcolo della generatrice, $\phi(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$, definita solo per $t < \lambda$.

Lezione 16 (13/4, 1 ora). Esercitazione. Risoluzione dell'es. 2 del 18/2/03 con particolare attenzione la calcolo della funzione di ripartizione di $Y = g(X)$ con g funzione nota e X v.a. continua di cui si conosce la densità. Nota sul fatto che la funzione $\phi(t) = 2 - e^t$ NON può essere la funzione generatrice dei momenti di una v.a.. Assegnato per casa il seguente esercizio: mostrare che se X è uniforme in $[0, 1]$ allora $X + 1$ è uniforme in un intervallo $[\alpha, \beta]$, in particolare trovare α, β (risposta $\alpha = 1, \beta = 2$).

Lezione 17 (14/4, 2 ore). Esercizio. Sia T la durata di una lampadina, $T \sim Exp(\lambda)$. Se la lampadina è perfetta, la sua durata media è di 100 ore. Durante la fabbricazione, con probabilità $p \in (0, 1)$ entrano invece delle impurità, nel qual caso la sua durata media diventa di sole 70 ore. Calcolare la probabilità che una generica lampadina duri almeno 100 ore. Calcolare la probabilità che siano entrate impurità, se si osserva che una lampadina si brucia dopo 40 ore. Calcolo di una soglia: trovare il tempo τ tale che una lampadina sana duri almeno τ con probabilità 0,95.

La funzione generatrice dei momenti identifica la distribuzione: se $\phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$ allora $X \sim Exp(\lambda)$, e così via. Diciamo che una classe di distribuzioni è autoriproduttrice se prese X, Y in quella classe, indipendenti, allora $X + Y$ è in quella classe. Esercizio: 1) le Bernoulli non sono autoriproduttrici; 2) le $B(n, p)$ al variare di n lo sono; le Poisson al variare del parametro lo sono; le esponenziali no.

Lezione 18 (19/4, 2 ore). Variabili aleatorie gaussiane: definizione nel caso canonico e nel caso generale, grafico, ruolo di μ e σ^2 a livello grafico; funzione di distribuzione cumulativa, notazione $\Phi(x)$ nel caso canonico, non calcolabilità analitica ed uso delle tavole, $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ nel caso generale; quantile gaussiano canonico di ordine α (notazione q_α), uso delle tavole, $q_{1-\alpha} = -q_\alpha$, $\Phi(q_\alpha) = \alpha$, $q_{\Phi(x)} = x$; notazione z_α : quel numero tale che $P(Z > z_\alpha) = \alpha$, con $Z \sim N(0, 1)$; vale $z_\alpha = q_{1-\alpha}$.

Esercizio su una soglia: se la domanda X è una gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$, quanto bisogna tenere in magazzino per soddisfarla con probabilità 95%. Prima nel caso $X \sim N(0, 1)$: detta θ tale scorta di sicurezza, deve valere $P(X \leq \theta) = 0.95$, quindi per definizione di quantile vale $\theta = q_{0.95}$. Nel caso generale si imposta l'equazione $P(X \leq \theta) = 0.95$, che equivale a $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\theta-\mu}{\sigma}\right) = 0.95$ dove ora $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ è $N(0, 1)$; quindi $\frac{\theta-\mu}{\sigma} = q_{0.95}$, ovvero $\theta = \mu + \sigma q_{0.95}$.

La funzione generatrice di una $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ è $\varphi(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$ (lo dimostreremo più avanti). Da qui si calcola $E[X] = \mu$, $Var[X] = \sigma^2$. Inoltre si dimostra il teorema: $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, indipendenti, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ implica che $\alpha X + \beta Y + \gamma$ è gaussiana, di media $\alpha\mu_X + \beta\mu_Y + \gamma$ e varianza $\alpha^2\sigma_X^2 + \beta^2\sigma_Y^2$. Le gaussiane sono autoriproducibili.

Lezione 19 (20/4, 1 ora). Primi elementi di statistica: il concetto di campione X_1, \dots, X_n ; media aritmetica \bar{X} ; \bar{X} è uno stimatore corretto (non distorto) di μ : $E[\bar{X}] = \mu$; \bar{X} è concentrato intorno a μ : $Var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$, molto minore di

σ^2 . Indirizziamoci ad una valutazione quantitativa dell'errore che si commette approssimando μ con \bar{X} ; una stima *certa* del tipo $|\bar{X} - \mu| \leq \delta$ è impossibile; cerchiamo di stabilire un'affermazione del tipo $|\bar{X} - \mu| \leq \delta$ con probabilità $1 - \alpha$. Esercizio preliminare: data $X \sim N(0, 1)$, dato $\alpha \in (0, 1)$, trovare δ tale che valga $|X| \leq \delta$ con probabilità $1 - \alpha$. Soluzione: $\delta = q_{1-\alpha/2}$.

Lezione 20 (21/4, 2 ore). Risolviamo il problema precedente nel caso più generale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (rimandiamo il caso di una v.a. X ancor più generale, che tratteremo in modo approssimato col teorema limite centrale). Ricordiamo che le combinazioni lineari di gaussiane indipendenti sono gaussiane, quindi \bar{X} è gaussiana. Inoltre, ricordiamo che $E[\bar{X}] = \mu$, $Var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$, quindi $Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. Pertanto $|\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}| \leq q_{1-\alpha/2}$ con probabilità $1 - \alpha$. Ovvero: $|\bar{X} - \mu| \leq \delta$ con probabilità $1 - \alpha$, dove

$$\delta = \frac{\sigma q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}.$$

Questa si dice *precisione*, mentre $1 - \alpha$ si dice *confidenza*; inoltre l'intervallo $[\bar{X} - \delta, \bar{X} + \delta]$ in cui si trova μ con probabilità $1 - \alpha$ si dice *intervallo di confidenza*. Scriveremo anche

$$\mu = \bar{X} \pm \delta \text{ con confidenza } 1 - \alpha.$$

Esercizio sul calcolo dell'intervallo di confidenza; esercizio sul calcolo della numerosità campionaria necessaria per avere una certa precisione. Osservazione sul fatto che la precisione aumenta relativamente poco all'aumentare della numerosità.

Calcolo della funzione generatrice di una gaussiana qualsiasi.

Lezione 21 (26/4, 2 ore). Teorema limite centrale. X_1, \dots, X_n campione estratto da X di media μ e varianza σ^2 finite, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ che legge ha? Conosciamo la risposta nel caso particolare delle autoriproduttori. In generale? La standardizzata $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ ha media nulla e varianza unitaria. Il teorema limite centrale stabilisce che è approssimativamente $N(0, 1)$, nel senso che $P(Z_n \leq x) \rightarrow \Phi(x)$ per $n \rightarrow \infty$, o analogamente $P(a < Z_n \leq b) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a)$ per $n \rightarrow \infty$. Idea della dimostrazione: si dimostra che la funzione generatrice di Z_n , $\varphi_{Z_n}(t)$, converge alla generatrice $\varphi(t) = e^{t^2/2}$ di una $N(0, 1)$. Posto $Y_k = \frac{X_k - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$, vale $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$, che sono indipendenti, da cui $\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_{Y_1}(t)^n = e^{n \log \varphi_{Y_1}(t)}$. Posto $f_n(t) = n \log \varphi_{Y_1}(t)$, basta dimostrare che $f_n(t) \rightarrow t^2/2$ per $n \rightarrow \infty$. Lo sviluppo di Taylor di $f_n(t)$ è $f_n(t) = t^2/2 + o_n(t^2)$ con $o_n(t^2) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Questo deriva dal fatto che $f_n(0) = 0$, $f'_n(0) = 0$ (verificati), $f''_n(0) = 1$ (questo e la proprietà $o_n(t^2) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ sono state omesse).

Esercizio 1.2 del 22 luglio 2003. Esercizio 3i del 22 luglio 2003; assegnato per casa il 3ii.

Lezioni 22-23 (27/4 e 28/4, 3 ore). Annullate per assemblea.

Lezione 24 (3/5, 2 ore). La statistica si divide in due rami: stima (identificazione di un modello) e test (verifica di un modello). Supponiamo che una

grandezza aleatoria fosse descritta in passato da una $N(\mu_0, \sigma^2)$, con parametri noti, e che ora sia descritta da una $N(\mu, \sigma^2)$ con μ incognito. Non vogliamo stimare μ ma solo stabilire se esso sia uguale o diverso da μ_0 . Ricordiamo che se X_1, \dots, X_n è un campione estratto da una $N(\mu_0, \sigma^2)$, allora $P\left(|\bar{X} - \mu_0| \leq \frac{\sigma q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$. Posto $Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}$, vale

$$P(|Z| \leq q_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Da qui nasce il test: scelto α , se il campione sperimentale x_1, \dots, x_n di media \bar{x} fornisce un valore $z = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}$ con valore assoluto maggiore di $q_{1-\alpha/2}$, riteniamo che il campione non possa provenire da una $N(\mu_0, \sigma^2)$ (test significativo). Viene svolto un esempio dalle note in rete.

Precisazioni di linguaggio su significatività, ipotesi nulla, ipotesi alternativa, regione critica e regione di accettazione; se il test non è significativo, vuol dire che il campione è *compatibile* con una $N(\mu_0, \sigma^2)$.

Valore p , suo calcolo, suo uso per effettuare un test.

Lezione 25 (4/5, 1 ora). S^2 come stimatore di σ^2 . E' non distorto: $E[S^2] = \sigma^2$ (dimostrazione). Distribuzione t di Student, suo uso nei test.

Lezione 26 (5/5, 2 ore). Errore di prima specie, sua probabilità = α (per il teorema ricordato sopra). Interpretazione grafica del test (gaussiane $N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ e $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ dei valori \bar{X} nei due casi). Errore di seconda specie; interpretazione grafica (gaussiana canonica e gaussiana $N(d, 1)$ dei valori Z , $d = \sqrt{n} \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}$); calcolo della probabilità di errore di seconda specie, detto β . Potenza = $1 - \beta$. Precisamente, è tutto relativo ad una ipotesi $\mu = \mu_1$, quindi $\beta = \beta(\mu_1)$. Oppure si usa d , quindi $\beta = \beta(d)$. Esempio. La potenza si può calcolare prima di fare gli esperimenti, in fase di progetto, per capire se ci si deve aspettare un risultato utile dagli esperimenti; deve però essere fissata la significatività.

Lezione 27 (10/5, 2 ore). Il concetto di DOE (Design Of Experiments, progettazione di esperimenti): vediamo due esempi. Il primo nella teoria della stima: trovare n che conduce ad una certa precisione sotto una certa confidenza. Il secondo nella teoria dei test: trovare n che fornisce una certa potenza relativamente ad una certa significatività. E' importante individuare la presenza di tutti questi concetti diversi, al di là dei nomi che vengono usati nella letteratura o nella pratica.

Approssimazione gaussiana del teorema limite centrale: a parole, le formule degli intervalli di confidenza e dei test, valide nel caso gaussiano, valgono approssimativamente più in generale. Viene risolto un esercizio di un compito che chiede l'intervallo di confidenza per la proporzione di una Bernoulli, usando l'approssimazione gaussiana. Viene espresso il teorema in generale. Viene estrapolata una definizione generale di stimatore asintoticamente gaussiano: uno stimatore $T_n = T(X_1, \dots, X_n)$ è uno stimatore gaussiano di un parametro λ se $\sqrt{n}(T_n - \lambda)$ tende ad una $N(0, \sigma^2)$ (nello stesso senso descritto dal TLC). Si verifica che sotto questa ipotesi vale la formula dell'intervallo di confidenza $\lambda = T_n \pm \delta$ con probabilità *approssimativamente* $1 - \alpha$, dove $\delta = \frac{\sigma q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$.

Lezione 28 (11/5, 1 ora). Test per una popolazione di Bernoulli. Si vuole rigettare l'ipotesi nulla $H_0 = "p \leq p_0"$ a favore dell'ipotesi alternativa $H_1 = "p > p_0"$. Confronto tra il test esatto e il test nell'approssimazione gaussiana. Criterio $np_0(1 - p_0) \geq 20$ per poter utilizzare l'approssimazione gaussiana in questo contesto. Test di Fisher-Irwing: confronto tra popolazioni di Bernoulli con rango diverso per capire se possiedono lo stesso valore p .

Lezione 29 (12/5, 2 ore). Riassunto sui test introdotti nella lezione precedente. Test gaussiani ad una coda e variante di Student. Confronto tra il test a una coda e quello a due code: si usa quello ad una coda quando si vuole testare ipotesi del tipo $H_1 = "\mu > \mu_0"$ e non semplice differenza. Maggior potenza del test ad una coda per scostamenti nella direzione "prevista". La potenza del test a una coda è però più bassa se lo scostamento della media è nella direzione inattesa. Test gaussiani appaiati. Versione con varianze conosciute e campioni indipendenti: in questo caso ci si riduce ad un semplice test gaussiano a due code. Versione con varianze incognite e campioni a priori non indipendenti a due a due: in questo caso ci si riduce ad un test di Student a due code.

Lezione 30 (17/5, 2 ore). Riassunto degli argomenti in vista del compito. Esercizi semplici sulle gaussiane (es. 1: determinare la distribuzione di $Z = X - Y$ se X ed Y sono gaussiane canoniche; es. 2: se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, calcolare $P(X > \lambda)$; es. 3: se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dato α trovare λ tale che $P(X > \lambda) = \alpha$). Esercizio su soglie di sicurezza: sapendo che X è gaussiana di varianza σ^2 , noto il campione sperimentale x_1, \dots, x_n di media \bar{x} , trovare λ tale che $P(X > \lambda) = \alpha$: prima, risoluzione come sopra supponendo per semplicità che μ sia dato da \bar{x} , poi risoluzione più articolata usando gli intervalli di confidenza per μ .

Esercizi sul teorema limite centrale. Se le variabili sono gaussiane, le stesse formule danno il valore esatto, non approssimato. Svolgimento di un esercizio dal Ross, su soglie gaussiane ed approssimazione TLC. Definizione di v.a. \log_{10} normale: una X tale che $\log_{10} X$ è normale.

Per casa:

1) Se X è \log_{10} normale, e precisamente $\log_{10} X \sim N(\mu, \sigma^2)$, a) calcolare $P(X > \lambda)$; b) dato α trovare λ tale che $P(X > \lambda) = \alpha$,

2) calcolare la potenza di un test unilaterale.

Lezione 31 (18/5, 1 ora). Esercitazione. Esercizi n. 26 (pag. 331) e 52 (pag. 337) del Ross sui test accoppiati e di Bernoulli. Consigliati il n. 53 e 54.

Lezione 32 (19/5, 2 ore). Esercizi su intervalli di confidenza e test in vista del compito. Calcolo della numerosità che produce una determinata potenza con una prefissata significatività. Curve OC. Caso unilaterale e bilaterale.

Lezione 33 (24/5, 2 ore). Legge dei grandi numeri: a parole, afferma che \bar{X}_n tende a μ . Già sappiamo che \bar{X}_n stima μ piuttosto bene ($E[\bar{X}_n] = \mu$, $Var[\bar{X}_n] = \sigma^2/n$, e nel caso gaussiano $P\left(|\bar{X}_n - \mu| \leq \frac{\sigma q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$). Si introduce il concetto di convergenza in media quadratica: $E\left[|\bar{X}_n - \mu|^2\right] \rightarrow 0$, e si dimostra che è vero. Si introduce poi il concetto di convergenza in probabilità: per ogni $\varepsilon > 0$, $P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \rightarrow 0$. Si dimostra il lemma di Markov e la disuguaglianza di Chebishev e si dimostra poi la Legge (debole) dei grandi

numeri: \bar{X}_n converge a μ in probabilità.

Lezione 34 (25/5, 1 ora). Risoluzione del secondo compito.

Lezione 35 (26/5, 2 ore). Due problemi di qualità: 1) calcolo di soglie, 3σ , 6σ ; 2) carte di controllo per la media: limiti UCL e LCL, somiglianza con i test, calcolo della probabilità che la carta si accorga di un cambiamento (analogo della potenza); pregi della struttura temporale rispetto a singoli test.

Cenni alla regressione lineare, non lineare ed in generale al problema di capire se c'è un legame tra una variabile indipendente X ed una variabile potenzialmente dipendente Y , e quale legame sia. La covarianza ed il coefficiente di correlazione si possono usare per capire se c'è un legame e se è migliore un legame lineare oppure uno di altro tipo; la regressione lineare permette di stimare i coefficienti di una dipendenza lineare del tipo $Y = \alpha X + \beta + \varepsilon$ con X ed ε indipendenti, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, calcolando prima la media dell'equazione, poi $Cov(X, Y)$ dall'equazione, e trovando $\mu_Y = \alpha\mu_X + \beta$, $Cov(X, Y) = \alpha\sigma_X^2$.