1 Descrizione sommaria degli argomenti svolti a lezione (a.a. 2005-06)

Lezione 1 (26/9/05). Introduzione al corso (dispense ed esercizi risolti in rete alle pagine di Gubinelli e Flandoli). Richiami di probabilità di base: spazio degli esiti ed eventi, operazioni su eventi, nozione generale di probabilità, probabilità condizionale, formule di fattorizzazione e di Bayes.

Variabili aleatorie discrete (elenco di valori e loro probabilità), esempi delle v.a. di Bernoulli, binomiali ed enunciato del loro legame. Come esempio, problema del banchiere: 1000 correntisti indipendenti, si osserva una giornata tipo, ciascuno ha prob. 1/5 di prelevare 250 euro oppure niente. Quanto si deve tenere in banca per servire sicuramente tutti? Quanto per servire con probabilità assegnata? Quanto viene prelevato mediamente? Si risponderà nelle lezioni successive

Lezione 2 (28/9/05). Riepilogo generale delle nozioni di probabilità:
- v.a. discrete e continue.
- valor medio, varianza, covarianza.
- Esempi di v.a. discrete: Bernoulli, Binomiali, di Poisson.
- Esempi di v.a. continue: Esponenziali e Gaussiane.
- Mancanza di memoria delle esponenziali.
- Proprieta' del minimo delle esponenziali.
- Teorema degli eventi rari.
- Legge dei grandi numeri e teorema limite centrale.

Lezione 3 (30/9/05). Riepilogo generale delle nozioni di probabilità:
- Esponenziali come buoni modelli per tempi tra eventi, e.g. arrivo di clienti, di ordini, di chiamate ad un centralino; arrivo di catastrofi naturali, ecc... (casi in cui vale la mancanza di memoria, almeno in modo approssimativo)
- Gaussiane come buoni modelli di fluttuazioni tipiche intorno ad una media (giustificazione tramite il teorema limite centrale)
- Esempio di modellizzazione degli arrivi a uno sportello (1 ora):
- intertempi esponenziali
- legge dei grandi numeri applicata al tempo di arrivo del 100esimo cliente
- teorema del limite centrale applicato alla stima della probabilita' che il 100esimo cliente arrivi prima di un tempo prefissato.

Lezione 4 (5/10/05). Relativamente alle v.a. gaussiane, si rammenta il significato di quantile e funzione di ripartizione (o distribuzione cumulativa) e l'uso delle tavole per il calcolo esplicito. Vengono poi ricostruite alcune formule riguardanti questi argomenti per una gaussiana non canonica (ovvero il modo di ricondursi ad una canonica), con varie interpretazioni grafiche.

Ci si mette nell'ottica della gestione di un magazzino e si usano questi elementi per calcolare il rischio che accadano certi eventi eccezionali (es. che il numero di richieste superi un certo valore), oppure viceversa per calcolare certe

soglie assegnato il rischio (es. quanto si deve tenere in magazzino per soddisfare le richieste il 95% delle volte). Si raffigurano geometricamente formule del tipo $\mu + k\sigma$ (es. $\mu + 3\sigma$), $\mu - k\sigma$, $\mu \pm k\sigma$ e se ne discute il significato applicativo.

Lezione 5 (7/10/05). Vengono introdotti i primi elementi di teoria dela gestione dei magazzini su previsione. Vengono raffigurate le funzioni Esistenza, Disponibilità, Rimanenza, ed il tempo di attesa. Viene svolto il calcolo delle scorte di sicurezza, nel caso più semplice in cui si effettui un acquisto costante ad intervalli di tempo costanti. Si descrive la modifica nel caso di acquisto variabile ad intervalli di tempo costanti, per riportare il livello delle scorte al livello di sicurezza richiesto.

Lezione 6 (12/10/05). Si inizia la trattazione delle catene di Markov (in tempo discreto). Un processo stocastico in tempo discreto è una sequenza di variabili aleatorie, indicizzate dal tempo, che descrivono l'evoluzione (aleatoria o parzialmente nota) di un certo sistema. Esempio semplice di processo stocastico: una sequenza di v.a. indipendenti. Definizione di catena di Markov tramite le probabilità condizionate: un processo stocastico è una catena di Markov se dipende dalla sua storia passata solo tramite il suo stato presente. Matrice di transizione ad n passi. Tutte le probabilità associate ad una catena di Markov sono determinate dalla probabilità di transizione ad un passo e dalla probabilità degli stati iniziali. Esempio di una catena di markov a 2 stati, calcolo della matrice di transizione ad $2, 3$ passi. Formula generale tramite la moltiplicazione di matrici.

Lezione 7 (14/10/05). Rappresentazione tramite grafo. Comportamento per tempi lughi delle catene di Markov. Concetto di probabilità invariante e sua caratterizzazione algebrica (equazione matriciale). Probabilità invariante come limite per tempi lunghi di una catena di Markov.

Lezione 8 (19/10/05). Si riprende il tema delle catene di Markov: grafo associato, matrice delle probabilità di transizione, interpretazione dinamica sia come evoluzione temporale delle probabilità di osservare questo o quello stato, sia come evoluzione temporale dello stato stesso.

Probabilità (misura, distribuzione) invariante. Significato intuitivo come descrizione statistica a regime. Come si calcola?

Esercizio del compito del 19/9/05 (es. 1). Risoluzione intuitiva del quesito 1 (classificazione degli stati e calcolo delle distribuzioni invarianti). Idee, a livello intuitivo, di transienza e ricorrenza, classi chiuse irriducibili, bilancio di flusso. Calcolo di π invariante sia col sistema $\pi = \pi P$ (più la condizione $\sum \pi_i = 1$), sia col bilancio di flusso (sempre con la condizione suddetta).

Lezione 9 (21/10/05). Avendo presente l'esercizio precedente, vengono introdotte ed esemplificate le nozioni di comunicazione tra stati, classe chiusa, classe irriducibile, stato transitorio (definito nel caso di catene finite come uno stato i tale che esista $j \neq i$ tale che $i \to j$ ma $j \nrightarrow i$) e stato ricorrente. Vengono enunciati alcuni teoremi sulle proprietà delle misure invarianti in relazione agli stati stransitori ed alle classi irriducibili finite. Sulla base di questi fatti rigorosi, si riesamina l'esercizio precedente.

Viene poi svolto un esercizio con due classi irriducibili, mostrando i cambiamenti ed illustrando il principio secondo cui tutte le distribuzioni invarianti

sono della forma $\alpha_1 \pi_{C_1} + \alpha_2 \pi_{C_2} + ...$ (con opportuno significato dei simboli).

Lezione 10 (26/10/05). Vengono riprese definizioni e teoremi sulla classificazione. Viene svolta la teoria delle catene di nascita e morte, come sulle dispense, ma nel caso finito.

Lezione 11 (28/10/05). Vengono ricordati alcuni fatti sulle serie numeriche a termini positivi, ed in particolare la serie geometrica. Viene poi svolta la teoria delle catene di nascita e morte nel caso infinito. Vengono svolti esempi elementari di code ed una prima parte dell'esempio (in rete) sul magazzino illimitato.

Lezione 12 (2/11/05). Processi di Markov a salti. Vengono introdotti in modo alternativo alle dispense, secondo il seguente schema. Si fa riferimento all'esempio di una semplice coda. A tempo discreto, in ogni unità temporale, dovevamo supporre che ci fossero 0 o 1 arrivi e 0 o 1 servizi, altrimenti la catena non era di nascita e morte e non si risolveva esplicitamente. Tale ipotesi è restrittiva ed innaturale. Immaginiamo invece che quando la catena si trova nello stato i, ovvero ci sono i persone in coda, vengano attivate due sveglie casuali, che suoneranno agli istanti $T_{i,i-1}$ e $T_{i,i+1}$. Se suona prima $T_{i,i-1}$, a quell'istante viene servito un cliente e la catena passa nello stato $i-1$. Se invece suona prima $T_{i,i+1}$, a quell'istante arriva un cliente e la catena passa nello stato $i+1$. In ciascuno dei due casi, a tale istante aleatorio ci troviamo in un nuovo stato j. Se supponiamo che i tempi delle sveglie siano esponenziali, per la proprietà di assenza di memoria, possiamo dimenticare il tempo trascorso e ricominciare da capo, con due nuove sveglie aleatorie, di nuovo esponenziali. Indichiamo con $\lambda_{i,j}$ il parametro della distribuzione esponenziale $T_{i,j}$. Abbiamo così definito con precisione una dinamica aleatoria, attraverso la prescrizione di una successione di *eventi discreti*, che accadono ad *istanti aleatori*. Lo stato della catena salta ad istanti aleatori da uno stato all'altro.

Viene esemplificato lo schema visto fin qui con un esempio, in cui sono assegnati i tempi medi di transizione, da cui si calcolano i coefficienti $\lambda_{i,j}$.

C'è una descrizione con probabilità di transizione? C'è un concetto di distribuzione invariante (situazione a regime) e come si calcola?

Lezione 13 (4/11/05). La dinamica stocastica precedente può essere descritta in modo alternativo (fatto a cavallo tra le due lezioni; lo riassumiamo qui). Supponiamo di essere nello stato i e di avere i vari tempi $T_{i,j} \sim Exp(\lambda_{i,j})$ di transizione ai diversi stati $j \neq i$. Introduciamo il tempo aleatorio

$$T_i = \min_{j \neq i} T_{i,j}$$

che descrive l'istante in cui suona il primo degli orologi $T_{i,j}$. Per un noto teorema, $T_i \sim Exp(\lambda_i)$ dove

$$\lambda_i = \sum_{j \neq i} \lambda_{i,j}.$$

Nel momento in cui suona l'orologio T_i dobbiamo effettuare una transizione, ma quale? Si sceglie lo stato j a cui transire usando le probabilità di transizione p_{ij}

definite da

$$p_{ij} = \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_i}.$$

Si potrebbe dimostrare che queste due descrizioni sono equivalenti.

Questa nuova descrizione introduce una *catena di Markov* a tempo discreto definita dalle probabilità di transizione p_{ij}, detta embedded Markov chain. A volte può essere utile. Per noi resterà marginale ed in particolare se ne deve evitare l'uso in calcoli tipo bilancio di flusso, perché la normalizzazione con i coefficienti λ_i cambia da stato a stato, quindi non può essere utilizzata quando si devono coinvolgere le transizioni da stati diversi in una stessa formula.

Abbiamo definito una dinamica aleatoria tramite orologi esponenziali. Introduciamo ora le probabilità di transizione

$$p_{ij}(t) = P\left(X_t = j | X_0 = i\right).$$

Si descrive un argomento intuitivo per dire che, per t molto piccolo, vale approssimativamente

$$p_{ij}(t) \sim P\left(T_{ij} \leq t\right), \quad j \neq i.$$

La probabilità $p_{ij}(t)$ cumula la probabilità di tutte le storie che portano dallo stato i al tempo zero allo stato j al tempo t, quindi sia le storie più semplici in cui c'è stata solo la transizione diretta da i a j, sia tutte quelle più complesse con due o più transizioni. Ma per t piccolo, la probabilità delle storie con 2 o più salti è molto minore della probabilità di un solo salto (anch'essa già molto piccola). Da qui si intuisce che $P\left(T_{ij} \leq t\right)$ coglie la parte principale di $p_{ij}(t)$.

Si osserva poi che, essendo

$$P\left(T_{ij} \leq t\right) = 1 - e^{-\lambda_{ij} t} \sim \lambda_{ij} t$$

vale $p_{ij}(t) \sim \lambda_{ij} t$ e quindi (cosa che si potrebbe dimostrare rigorosamente)

$$\lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lambda_{ij}.$$

Per questa ragione i numeri λ_{ij} vengono detti *tassi di transizione* (tasso è il nome dato ad una grandezza per unità di tempo, operando un limite quando la grandezza non è contante nel tempo).

Si osservi che i tassi di transizione possono essere maggiori di uno. Non sono delle probabilità. Tuttavia, vedremo che il grafo corredato dei tassi di transizione permette il calcolo delle distribuzioni invarianti come se i tassi fossero delle probabilità, usando le stesse regole (bilancio di flusso, formule per il caso nascita-morte).

Lezione 14 (9/11/05). Fino ad ora abbiamo una descrizione di un sistema con certi stati, quando si trova in uno stato i vengono attivate delle sveglie aleatorie T_{ij} esponenziali relative alle possibili transizioni $i \to j$, con tassi λ_{ij}, la prima che suona determina la transizione che si esegue, e si ricomincia da capo. Abbiamo capito che le probabilità di transizione $p_{ij}(t)$, pur difficile da calcolare esattamente, per t piccolo è circa uguale alla probabilità $P\left(T_{ij} \leq t\right)$,

che vale $1-e^{-\lambda_{ij}t}$, che a sua volta per t piccolo è circa uguale a $\lambda_{ij}t$ (formula di Taylor). In definitiva, si può dimostrare che

$$p_{ij}(t) \sim \lambda_{ij}t \text{ (per } j \neq i).$$

Introduciamo la matrice di transizione $P(t)$ di elementi $p_{ij}(t)$ e cerchiamo le probabilità invarianti, ovvero i vettori riga π che soddisfano $\pi = \pi P(t)$ per ogni $t \geq 0$. Applichiamo il bilancio di flusso al generico stato i: la massa uscente è

$$\pi_i \sum_{j \neq i} p_{ij}(t) \sim t \cdot \pi_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$$

mentre la massa entrante è

$$\sum_{j \neq i} \pi_j p_{ji}(t) \sim t \cdot \sum_{j \neq i} \pi_j \lambda_{ji}$$

da cui si può dedurre

$$\pi_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} = \sum_{j \neq i} \pi_j \lambda_{ji}.$$

Questo è il bilancio di flusso che si otterrebbe usando direttamente i tassi λ_{ij} come se fossero probabilità di transizione.

L'uso del bilancio di flusso viene esemplificato con gli esercizi 1 e 6 dell'elenco. Nel caso di catene di nascita e morte, le formule finali sono le stesse del caso a tempo discreto, usando i tassi al posto delle probabilità; questo verrà esemplificato la volta successiva.

Lezione 15 (11/11/05). Esercizio 3 della lista. In aggiunta: numero medio di automezzi nel parco. A questo proposito si osserva che se si è trovata la misura invariante π, distribuzione a regime del processo X_t, e nell'ipotesi che X_t assuma i valori $0, 1, ...$, vale

$$E[X_t] = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k$$

e se siamo nella situazione $\pi_k = \pi_0 \alpha^k$ allora

$$E[X_t] = \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} k\alpha^k = \pi_0 \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}.$$

L'ultima uguaglianza si dimostra derivando per serie: quando $x \in (0,1)$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = D\frac{1}{1-x} = D\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} kx^k.$$

In definitiva, per una catena di nascita-morte con tassi di crescita λ e di diminuzione μ, essendo $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ e $\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$, il numero medio vale $\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$, quindi

$$\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}.$$

Legame tra esponenziali e Poisson, processo di Poisson. Si illustra il problema di avere degli eventi temporali con intertempi $T_1, T_2, ... \sim Exp(\lambda)$, indipendenti; fissato $t > 0$, si introduce la v.a. N_t che conta il numero di eventi entro il tempo t e si vuole determinare la legge di N_t. Preliminare: Erlang, idea di dimostrazione del teorema ne casi $n = 2$. Teorema: $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, con dimostrazione.

Al variare di t, N_t può essere vista come una funzione aleatoria del tempo. Ne viene disegnata una realizzazione. N_t si chiama processo di Poisson. Può anche essere visto come lo stato di un processo a salti di nascite a morte in cui gli aumenti $i \to i+1$ hanno tasso λ, mentre mancano le transizioni $i \to i-1$. Non viene invece svolta la presentazione del processo di Poisson come sulle dispense, che risulta pertanto facoltativa.

Lezione 16 (16/11/05). Abbiamo inquadrato gli esercizi elementari sui processi a salti, in cui i tassi sono assegnati esplicitamente o quasi (tramite i tempi medi di attesa prima della transizione). Vengono discussi esercizi elementari sull'esempio nascita-morte, magari in condizioni meno ovvie del caso puramente geometrico (es. 1 del 25/6/04 ed es. 2 della lista).

Lezione 17 (18/11/05). Esercizio simile al problema che si trova nelle dispense denominate "Esempi di dimensionamento", parte "2: con processi a salti". In breve, il problema è quello (denominato coda M/M/c) di una singola coda con c serventi (c=5 nell'esercizio); arrivi secondo un processo di Poisson, con assegnato numero medio di arrivi in un certo lasso di tempo (20 in un'ora, nell'esercizio); servizi esponenziali di ciascun servente, tutti con la stessa media (5 min. in media per servire un cliente). Si deve: 1) descrivere il numero di utenti nel sistema con un processo a salti; 2) capire se si raggiunge un regime stazionario; 3) a regime, trovare ad esempio la probabilità di non avere utenti nel sistema; 4) a regime, calcolare il tempo medio di permanenza nel sistema.

Esercizio simile al problema che si trova nelle stesse dispense, ma parte "1: con catene di Markov", sezione 2.4 (due giorni per la consegna). L'esercizio parla di una coda con 5 serventi, che però lavora a tempo discreto, diciamo con scansione di un minuto tra un istante e l'altro. Ciascun servente completa un servizio esattamente in un minuto (deterministico). Nell'arco di un minuto pervengono k richieste di servizio, con $k = 0, 1, ..., 10$, con probabilità $p_0, p_1, ..., p_{10}$. L'unica complicazione è che il sistema di servizio accetta le richieste solo se è sicuro di poterle servire in al massimo due intervalli temporali (2 minuti). Descrivere il numero di utenti nel sistema con una catena di Markov. Per ora sono stati trovati gli stati e le transizioni possibili.

Lezione 18 (23/11/05). Breve completamento delle notazioni sui tassi di transizione: si introduce il tasso da uno stato in se stesso, sulla base della formula

$$p_{ii}(t) \sim 1 + \lambda_{ii} t.$$

Siccome $\sum p_{ij}(t) = 1$, si trova $\sum \lambda_{ij} = 0$, quindi

$$\lambda_{ii} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}.$$

La matrice A dei tassi di transizione è detta anche generatore (infinitesimale) del processo di Markov.

Risoluzione dell'esercizio 1 del 16/02/04, domande 1, 2 e 3.

Risoluzione dell'esercizio 1 del 14/01/05, domanda 2.

Lezione 19 (25/11/05). Esercitazione: es. 1 e 2 del 18/2/05. Es. 2 del 14/1/02.

Lezione 20 (30/11/05). Esercitazione: es. 8 della lista (c'è un errore di stampa: 7 è lo stato anomalo, ed anche la domanda sulla distrubuzione al tempo 3 è a partire da 7).

Es. 2 dell'8/3/03.

Es. 1 del 16/7/04. NOTA: la soluzione di questo esercizio è completamente sbagliata, per il fatto che si riferisce ad un altro genere di esercizio "tipico". Si modifichi il testo dell'esercizio nel seguente modo: invece di richieste di manutenzione, si pensi a semilavorati; invece che interventi di manutenzione, si pensi alla lavorazione completa del semilavorato. Ci sono 20 fornitori di semilavorati (chiamati pezzi nel seguito), ciascuno invia alla nostra azienda un pezzo mediamente ogni 80 giorni. Noi completiamo il lavoro con un tempo medio di un giorno. Con queste premesse, le risposte dell'esercizio sono tutte giuste. La differenza è che i semilavorati di uno stesso fornitore li possiamo accumulare, cioè quel fornitore continua a mandarli anche se non li abbiamo completati. Invece le richieste di intervento di uno stesso utente non si accumulano: se la sua fotocopiatrice è rotta, prima dobbiamo aggiustarla, e solo da lì in poi può arrivare una sua nuova richiesta d'intervento. In conclusione, nella risoluzione era stata persa di vista una caratteristica specifica di quel particolare problema reale, che è la non accumulabilità delle richieste di intervento di un singolo cliente.

Lezione 21 (2/12/05). Su richiesta, si prevede di risolvere gli esercizi 4 del 9/12/04 e es 1 della parte seconda del 4/11/04.

Lezione 22 (7/12/05). Metodi di previsione: idee generali (es.: possibilità dell'uso della regressione), media mobile, smorzamento esponenziale. Inizializzazione.

Lezione 23 (9/12/05). Illustrazione di una pagina Excel che implementi media mobile e smorzamento esponenziale. Stima di σ del rumore, tramite gli errori che avrebbe commesso il metodo sui dati già noti. Uso di questa idea per calibrare i parametri (si scelgono quelli che avrebbero prodotto la σ minore).

Nell'ipotesi che l'errore sia gaussiano, calcolo di soglie bilaterali ed unilaterali, motivazioni applicative.

Lezione 24 (14/12/05). Metodo di smorzamento esponenziale con trend. Inizializzazione. Scelta dei parametri. Implementazione su Excel. Confronto col metodo senza trend. Possibili pregi del metodo senza trend.

Lezione 25 (16/12/05). Stagionalità moltiplicativa rispetto a stagionalità additiva. Metodo di Winters. Inizializzazione. Scelta dei parametri. Implementazione su Excel. Problemi lasciati alla riflessione personale: i) come immaginare a priori, sulla base della visione sommaria dei dati, quali parametri (grandi o piccoli) sarebbero più opportuni? ii) come si potrebbe agire quando i dati mostrano trend non lineare?