

# Programma di Istituzioni di Probabilità

Docente: Franco Flandoli  
Anno accademico 2012-13, primo semestre

## 1 Introduzione ai Processi Stocastici

Nozioni di base (marginali, realizzazioni, versioni, legge del processo, filtrazioni, processi adattati ecc.). Costruzione: teorema di estensione di Kolmogorov. Esempio: processi gaussiani. Richiami e approfondimenti sulle probabilità condizionali e sulla speranza condizionale. Definizione di proprietà di Markov, riformulazioni e criteri.

## 2 Due esempi: Moto Browniano e processo di Poisson

Definizioni, equivalenze, proprietà di Markov. Cenni alle costruzioni ed alle proprietà delle traiettorie.

## 3 Elementi di teoria delle martingale

Definizioni di martingala, super e sub martingala. Tempi d'arresto. Caso a tempo discreto: teoremi d'arresto, disuguaglianze di Doob, risultati di convergenza; decomposizione di Doob-Meyer. Caso a tempo continuo: generalizzazione dei risultati precedenti. Variazione quadratica; semimartingale. Moto browniano come martingala, problema della rovina ed applicazioni delle disuguaglianze di Doob.

## 4 Integrale stocastico secondo Itô

Costruzione dell'integrale stocastico nel caso del moto browniano e di processi adattati di quadrato integrabile; proprietà di martingala. Generalizzazione a processi adattati non di quadrato integrabile. Cenni alla generalizzazione a semimartingale come integratori. Processi di Itô come semimartingale. Variazione quadratica dei processi di Itô; cenno all'integrale di Stratonovich.

## 5 Formula di Itô

Versione classica ed alcune estensioni (tipo Föllmer). Applicazioni: teorema di Girsanov; proprietà di rappresentazione delle martingale; disuguaglianze per integrali stocastici; caratterizzazione di Lévy del moto browniano.

## 6 Equazioni differenziali stocastiche

Nozioni di esistenza ed unicità. Teorema di esistenza ed unicità in ipotesi di lipschitzianità. Cenno ai teoremi di esistenza di soluzioni deboli in condizioni più deboli per i coefficienti. Cenno alla teoria dei flussi stocastici.

## 7 Legami tra equazioni differenziali stocastiche ed equazioni a derivate parziali

Premessa sui legami tra equazioni differenziali ordinarie ed equazioni di continuità e del trasporto. Generalizzazione al caso stocastico: legame tra equazioni differenziali stocastiche ed equazione di Fokker-Planck e di Kolmogorov. Soluzione probabilistica del problema di Dirichlet. Cenni alla formula di Feynman-Kac, ai legami nel caso nonlineare, ai legami come teoremi limite di sistemi di particelle interagenti.

## 8 Alcune applicazioni

Formule di Black-Scholes. Cenno ad applicazioni al filtraggio di segnali ed esempi tratti dalla fisica.

## Testi di riferimento

I testi di riferimento sono:

Richard F. Bass, *Stochastic Processes*, Cambridge Univ. Press 2011

Paolo Baldi, *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, Quaderni UMI, Pitagora 2000.

E' possibile che il docente fornisca note parziali su alcuni argomenti.

## Nozioni presupposte

Nozioni di base di calcolo delle probabilità e teoria della misura, secondo il programma di massima del corso di Probabilità; nozioni elementari di analisi funzionale.

## Modalità d'esame

Prova scritta e prova orale.