Metodi Matematici e Statistici
Modulo di Statistica
Ing. Gestionale, esercizi supplementari del 29/11/03.

Esercizio 1. Un dirigente osserva ogni mese l'andamento del mercato e decide in base a certi parametri se investire (I) durante il mese successivo in pubblicità televisiva per un certo bene di consumo prodotto nella sua azienda. Classifica il mercato in due categorie, attivo (A) e fermo (F) e tiene poi conto, oltre a questo, anche di vari altri parametri interni all'azienda. Se il mercato è attivo, il dirigente ordina di spendere in pubblicità solo il 20% delle volte (sulla base degli altri parametri), altrimenti, se è fermo, stabilisce di investire in pubblicità il 70% delle volte.

Supponiamo che, mediamente, il mercato sia attivo 4 volte su 12.

1) Che probabilità c'è che venga fatta pubblicità?

2) Si è osservato che se il mercato è attivo in un mese, resta attivo con probabilità 0.8 anche nel mese successivo. Se invece è fermo in un mese, resta fermo con probabilità 0.5 nel mese successivo. Se durante un certo mese viene fatta pubblicità, che probabilità c'è che in quello stesso mese il mercato sia attivo? (Si ricordi che il dirigente investe nel mese successivo a quello di osservazione).

Sol. Es. 1. $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(F) = \frac{2}{3}$, $P(I|A) = 0.2$, $P(I|F) = 0.7$.

1)

$$\begin{aligned} P(I) &= P(I|A)P(A) + P(I|F)P(F) \\ &= 0.2 \cdot \frac{1}{3} + 0.7 \cdot \frac{2}{3} = 0.533. \end{aligned}$$

2) Indichiamo con A e F la situazione del mercato in un certo mese e con A^+ e F^+ quella nel mese successivo. Vale $P(A^+|A) = 0.8$, $P(F^+|F) = 0.5$. Chiamiamo I l'evento che venga fatta pubblicità nel secondo di questi due

mesi, fatto deciso sulla base del mercato nel primo mese. Per Bayes

$$P(A|I) = \frac{P(I|A)P(A)}{P(I)} = \frac{0.2 \cdot \frac{1}{3}}{0.533} = 0.125$$

$$P(F|I) = \frac{P(I|F)P(F)}{P(I)} = \frac{0.7 \cdot \frac{2}{3}}{0.533} = 0.875$$

e quindi, *condizionato ad* I,

$$\begin{aligned} P(A^+) &= P(A^+|A)P(A) + P(A^+|F)P(F) \\ &= 0.8 \cdot 0.125 + 0.5 \cdot 0.875 = 0.537. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Studiamo quanto spende una certa fascia di popolazione (es. sotto i 25 anni) in un certo prodotto; indichiamo con S la v.a. che indica il valore di questa spesa. Intervistiamo 50 persone che ci forniscono 50 valori di spesa $s_1, ..., s_{50}$.

1) Se già sappiamo che S ha media 15 e deviazione standard 5, che probabilità c'è che $\frac{S_1+...+S_{50}}{50}$ superi 16? Rispondere a questa domanda sia sotto l'ipotesi che S sia gaussiana, sia senza questa ipotesi.

2) Se invece sappiamo solo che S ha deviazione standard 5 ed osserviamo, dopo le nostre interviste, il valore $\frac{s_1+...+s_{50}}{50} = 14$, cosa possiamo dire al 95% sulla media vera di S?

Sol. Es. 2. 1) Se S è $N(15, 25)$ allora $\frac{S_1+...+S_{50}}{50}$ è $N(15, \frac{25}{50})$, quindi

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_1 + ... + S_{50}}{50} > 16\right) &= 1 - \Phi\left(\frac{16-15}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.414) = 0.0786. \end{aligned}$$

2) Senza tale ipotesi, per il teorema limite centrale vale approssimativamente lo stesso risultato (si noti ad esempio che

$$P\left(\frac{S_1 + ... + S_{50}}{50} > 16\right) = P\left(\frac{S_1 + ... + S_{50}}{50} - 15 > 16 - 15\right)$$

$$= P\left(\frac{S_1 + ... + S_{50} - 50 \cdot 15}{\sqrt{50} \cdot 5} - 15 > \frac{(16-15)\sqrt{50}}{5}\right)$$
$$= P\left(\frac{S_1 + ... + S_{50} - 50 \cdot 15}{\sqrt{50} \cdot 5} - 15 > 1.414\right)$$

che poi si approssima con $1 - \Phi(1.414)$ per il teorema limite centrale).

2) Basta applicare la formula per l'intervallo di confidenza della media: al 95% vale

$$\mu = 14 \pm \delta$$

dove

$$\delta = \frac{5 \cdot q_{0.975}}{\sqrt{50}} = \frac{5 \cdot 1.96}{\sqrt{50}} = 1.385.$$