1 Sulla dimostrazione del TLC

Lo scopo della seguente variante di dimostrazione è quello di evitare l'uso del logaritmo in campo complesso, non difficile ma comunque un po' insidioso.

Nella dimostrazione del TLC si arriva a dover dimostrare, per t fissato, che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n=e^{-t^2/2}$$

dove, cosa importante, la successione $o\left(\frac{t^2}{n}\right)$ è a valori complessi. Riscrivendo l'espressione come

$$\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n\left(\frac{1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)}{1-\frac{t^2}{2n}}\right)^n$$

basta dimostrare che il secondo fattore, che possiamo riscrivere nella forma

$$\left(1+\frac{o\left(\frac{t^2}{n}\right)}{1-\frac{t^2}{2n}}\right)^n$$

tende ad 1. Riscriviamo per comodità $\frac{o\left(\frac{t^2}{n}\right)}{1-\frac{t^2}{2n}}$ nella forma $\frac{\omega_t(n)}{n}$ dove $\omega_t\left(n\right)$ è una successione infinitesima a valori complessi. La tesi è quindi $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\omega_t(n)}{n}\right)^n=1$. Vale

$$\begin{aligned}
\left|\left(1+\frac{\omega_t\left(n\right)}{n}\right)^n-1\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\omega_t\left(n\right)}{n}\right)^{n-k}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\left|\omega_t\left(n\right)\right|}{n}\right)^{n-k} \\
&= \left(1+\frac{\left|\omega_t\left(n\right)\right|}{n}\right)^n-1.
\end{aligned}$$

Quindi basta dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\left|\omega_t\left(n\right)\right|}{n}\right)^n=1.$$

A questo punto i numeri complessi sono spariti, per cui si può svolgere la dimostrazione in vari modi (ad esempio passando ai logaritmi, reali), che lasciamo per esercizio.

2 Sulla dimostrazione della Proposizione 4.2.2

A completamento delle dimostrazioni riportate sulle dispense, può essere utile sviluppare anche un'intuizione grafica disegnando passo a passo le funzioni e gli insiemi illustrati nella seguente argomentazione.

Supponiamo che vanga la condizione (b) della Proposizione e dimostriamo la (a).

Dimostriamo una proprietà preliminare di interesse anche autonomo: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$\mu_n \left(B\left(0,R\right)^c\right) \leq \epsilon, \qquad \mu\left(B\left(0,R\right)^c\right) \leq \epsilon.$$

Innanzi tutto, dato $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che $\mu\left(B\left(0,R\right)^c\right) \leq \epsilon$. Infatti, $\bigcap_N B\left(0,N\right)^c = \emptyset$ da cui $\lim_{N\to\infty} \mu\left(B\left(0,N\right)\right) = 0$, da cui la proprietà che volevamo verificare. A questo punto,

$$\mu_n \left(B\left(0,R\right)^c\right) = \mu_n\left(\mathbb{R}\right) - \mu_n\left(B\left(0,R\right)\right) \leq \mu_n\left(\mathbb{R}\right) - \mu_n\left(f_R\right)$$

dove f_R è continua, vale 1 su $B\left(0,R-1\right)$, zero su $B\left(0,R\right)^c$ e nel mezzo è compresa tra 0 ed 1. Pertanto

$$\limsup \mu_n \left(B\left(0,R\right)^c\right) \leq \mu\left(\mathbb{R}\right) - \mu\left(f_R\right) \leq \mu\left(\mathbb{R}\right) - \mu\left(B\left(0,R-1\right)\right) = \mu\left(B\left(0,R-1\right)^c\right).$$

Da qui e dalla proprietà dimostrata sopra per μ, discende facilmente che, dato $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che $\mu_n\left(B\left(0,R\right)^c\right) \leq \epsilon$ indipendentemente da n.

Torniamo ora alla dimostrazione principale, cioè che (b) implica (a).

Presa $f \in C_b$, che senza restrizione possiamo supporre compresa tra 0 ed 1, preso $\epsilon > 0$, fissiamo un $R > 0$ con la proprietà appena dimostrata. Sia f_R uguale ad f su $B\left(0,R\right)$ uguale a zero su $B\left(0,R+1\right)^c$, compresa tra 0 ed 1 nel mezzo e continua. Allora

$$\begin{aligned} \mu_n\left(f\right) - \mu\left(f\right) &= \mu_n\left(f_R\right) - \mu\left(f_R\right) \\ &\quad + \mu_n\left(f - f_R\right) - \mu\left(f - f_R\right). \end{aligned}$$

Il primo termine, $\mu_n\left(f_R\right) - \mu\left(f_R\right)$, tende a zero. Il secondo è maggiorato da

$$\begin{aligned} \left|\mu_n\left(f - f_R\right) - \mu\left(f - f_R\right)\right| &\leq \left|\mu_n\left(f - f_R\right)\right| + \left|\mu\left(f - f_R\right)\right| \\ &\leq 2\left|\mu_n\left(B\left(0,R\right)^c\right)\right| + 2\left|\mu\left(B\left(0,R\right)^c\right)\right| \\ &\leq 4\epsilon. \end{aligned}$$

Ne discende facilmente

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n\left(f\right) - \mu\left(f\right) = 0.$$

3 Sulla costruzione del processo di Poisson

3.1 Introduzione

Riprendiamo la costruzione delle dispense, indicando con S_i gli intertempi esponenziali (indipendenti e di parametro λ), con $T_n = \sum_{i=1}^n S_i$ gli istanti di salto, con $N_t = \sum_{n=1}^\infty 1_{T_n \le t}$ il presunto processo di Poisson. Nel seguito supporremo di aver già verificato, come sulle dispense, che $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, per ogni $t \geq 0$.

Approfondiamo la verifica del fatto che $N_t - N_s$ è indipendente da N_s ed è $\mathcal{P}(\lambda(t-s))$. Come sappiamo, ciò discende dal fatto che

$$P(N_t - N_s = h | N_s = k) = P(N_{t-s} = h). \tag{1}$$

Infatti, in tal caso, Vale

$$\begin{aligned} P(N_t - N_s = h) &= \sum_k P(N_t - N_s = h | N_s = k) P(N_s = k) \\ &= P(N_{t-s} = h) \sum_k P(N_s = k) \\ &= P(N_{t-s} = h) \end{aligned}$$

ed inoltre vale

$$P(N_t - N_s = h; N_s = k) = P(N_s = k) P(N_{t-s} = h) = P(N_s = k) P(N_t - N_s = h).$$

3.2 Premessa

Useremo un concetto relativamente nuovo: l'indipendenza e la distribuzione condizionata ad un evento. Diciamo che gli eventi A e B sono indipendenti condizionatamente all'evento C (con $P(C) > 0$) se

$$P(A \cap B | C) = P(A|C) P(B|C).$$

Questo equivale a

$$P(A \cap B \cap C) P(C) = P(A \cap C) P(B \cap C).$$

Vediamo due casi particolari.

Remark 1 *Se A, B, C sono indipendenti, allora A e B sono indipendenti condizionatamente a C.*

Remark 2 *Se B è indipendente dai tre eventi $A, C, A \cap C$, allora A e B sono indipendenti condizionatamente a C. Infatti*

$$P(A \cap B \cap C) P(C) = P(B) P(A \cap C) P(C) = P(A \cap C) P(B \cap C).$$

Oltre a ciò, parleremo di densità di una v.a. X condizionata ad un evento C una funzione densità f tale che

$$P(X \leq a|C) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

(ovviamente questa definizione si generalizza ad un concetto di legge condizionata; a noi servità la densità).

Può essere chiarificatore immaginare che lo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sia stato rimpiazzato dallo spazio $(C, \mathcal{F}_C, P(\cdot|C))$, dove $\mathcal{F}_C$ è formata dagli insiemi $A \cap C$, con $A \in \mathcal{F}$. I concetti di indipendenza e legge condizionale sono le usuali nozioni di indipendenza e legge viste però per gli oggetti "ristretti" a $(C, \mathcal{F}_C, P(\cdot|C))$. Per le v.a. e per i processi, il concetto di restrizione è quello usuale: si considera $X|_C$, ed analogamente per un processo.

3.3 Verifica della (1)

Veniamo quindi alla dimostrazione di (1). Il numero intero k ed il numero reale positivo s usati nel seguito sono quelli dell'evento $\{N_s = k\}$. In analogia a quanto descritto poco sopra, consideriamo lo spazio $(C, \mathcal{F}_C, P(\cdot|C))$ con $C = \{N_s = k\}$. Consideriamo il processo stocastico $(N_t - N_s)_{t \geq s}$ (s fissato) ristretto a questo spazio, che chiameremo processo condizionato a $\{N_s = k\}$. Indichiamo con $\left(\widetilde{N}_u\right)_{u \geq 0}$ questo processo, ovvero precisamente

$$\widetilde{N}_u = (N_{s+u} - N_s)\,|_{\{N_s = k\}}.$$

Se mostriamo che $\widetilde{N}_u \sim \mathcal{P}(\lambda u)$, la (1) è verificata.

Poniamo

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_1 &: T_{k+1} - s \\ \widetilde{S}_j &= S_{k+j} \text{ per } j \geq 2. \end{aligned}$$

Essi (come illustrato sulle dispense) sono gli *intertempi* di salto del processo $\left(\widetilde{N}_u\right)_{u \geq 0}$. Poniamo

$$\widetilde{T}_n = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{S}_i$$

da cui discende

$$\widetilde{N}_u = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\widetilde{T}_n \leq u}.$$

Se verifichiamo che le v.a. $\left(\widetilde{S}_j\right)_{j \geq 1}$ sono, condizionatamente a $\{N_s = k\}$, indipendenti e di legge $\mathcal{E}(\lambda)$, ne discende $\widetilde{N}_u \sim \mathcal{P}(\lambda u)$ come nel caso già visto delle v.a. $(S_j)_{j \geq 1}$ ed N_t e la dimostrazione è completa.

Premettiamo un caso facile, illustrato anche sulle dispense:

$$\begin{aligned}
P\left(\widetilde{S}_2 \leq a_2, ..., \widetilde{S}_n \leq a_n | N_s = k\right) &= \prod_{i=2}^{n} P\left(\widetilde{S}_i \leq a_i | N_s = k\right) \\
&= \prod_{i=2}^{n} P\left(S_{k+i} \leq a_i\right)
\end{aligned}$$

perché, essendo $\{N_s = k\} = \{T_k \leq s < T_{k+1}\}$ e $\left\{\widetilde{S}_i \leq a_i\right\} = \{S_{k+i} \leq a_i\}$ (per $i \geq 2$), gli eventi $\left\{\widetilde{S}_2 \leq a_2\right\}, ..., \left\{\widetilde{S}_n \leq a_n\right\}, \{N_s = k\}$ sono indipendenti; basta quindi usare l'osservazione 1. Quindi le v.a. $\left(\widetilde{S}_j\right)_{j \geq 2}$ sono, condizionatamente a $\{N_s = k\}$, indipendenti e di legge $\mathcal{E}(\lambda)$.

Includiamo ora $\widetilde{S}_1$. In base all'osservazione 2 (applicata ad $A = \left\{\widetilde{S}_1 \leq a_1\right\}$, $B = \left\{\widetilde{S}_2 \leq a_2, ..., \widetilde{S}_n \leq a_n\right\}$, $C = \{N_s = k\}$), vale

$$P\left(\widetilde{S}_1 \leq a_1, \widetilde{S}_2 \leq a_2, ..., \widetilde{S}_n \leq a_n | N_s = k\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(\widetilde{S}_i \leq a_i | N_s = k\right).$$

Quindi le v.a. $\left(\widetilde{S}_j\right)_{j \geq 1}$ sono indipendenti, condizionatamente a $\{N_s = k\}$. Resta da verificare che $\widetilde{S}_1$, condizionatamente a $\{N_s = k\}$, ha legge $\mathcal{E}(\lambda)$. Per questo, utilizziamo il seguente calcolo, basato su regole di probabilità condizionale, ancune delle quali forse solo accennate in passato (indicheremo con f_{T_k} la densità di T_k):

$$P\left(\widetilde{S}_1 \leq a | N_s = k\right) = \frac{P\left(T_{k+1} - s \leq a, T_k \leq s < T_{k+1}\right)}{P\left(N_s = k\right)}$$

$$\begin{aligned}
P\left(T_{k+1} - s \leq a, T_k \leq s < T_{k+1}\right) &= P\left(T_k \leq s, s < T_k + S_{k+1} \leq s + a\right) \\
&= \int_0^s P\left(T_k \leq s, s < T_k + S_{k+1} \leq s + a | T_k = u\right) f_{T_k}(u)\, du \\
&= \int_0^s P\left(s < u + S_{k+1} \leq s + a\right) f_{T_k}(u)\, du \\
&= \int_0^s \left(e^{-\lambda(s-u)} - e^{-\lambda(s+a-u)}\right) f_{T_k}(u)\, du \\
&= \int_0^s \left(e^{-\lambda(s-u)} - e^{-\lambda(s+a-u)}\right) \frac{1}{(k-1)!} \lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u} du \\
&= \left(e^{-\lambda s} - e^{-\lambda(s+a)}\right) \frac{1}{(k-1)!} \lambda^k \int_0^s u^{k-1} du \\
&= \left(e^{-\lambda s} - e^{-\lambda(s+a)}\right) \frac{1}{k!} (\lambda s)^k
\end{aligned}$$

$$P\left(\widetilde{S}_1 \leq a | N_s = k\right) = \frac{\left(e^{-\lambda s} - e^{-\lambda(s+a)}\right)\frac{1}{k!}\left(\lambda s\right)^k}{e^{-\lambda s}\frac{1}{k!}\left(\lambda s\right)^k} = 1 - e^{-\lambda a}$$

che dimostra ciò che volevamo.