# 1 Indice

1. Stimatori
   2. Chi quadro
   3. Esempio di prova orale.

# 2 Stimatori

Esempio: $\overline{X}$ è uno stimatore di $\mu$. Esempio: $S^2$ è uno stimatore di $\sigma^2$. Come si trovano stimatori per parametri più complessi?

Esempio. Sia $X \sim Exp(\lambda)$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ per $x \geq 0$. Come possiamo costruire uno stimatore di $\lambda$?

**Metodo dei momenti**. Legare il parametro $\lambda$ alla media, o alla varianza o più in generale a qualche momento. Sappiamo che

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

Pertanto

$$\lambda = \frac{1}{E[X]}.$$

Da qui nasce lo stimatore

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$$

come stimatore di $\lambda$.

Osservazione. Abbiamo visto un esempio di questo tipo nel tentativo di stimare i parametri di una Gamma, lezione 24/10/2017.

**Metodo di massima verosimiglianza**. Sempre esemplificando con l'esponenziale: si chiama verosimiglianza la funzione

$$L(\lambda, x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda e^{-\lambda x_i}\right)$$

per $x_i \geq 0$. In astratto, se il parametro da stimare si chiama $\theta$, e la densità in gioco si chiama $f_\theta(x)$, la verosimiglianza è la funzione

$$L(\theta, x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i).$$

Si considera fissato il campione $(x_1, ..., x_n)$ e si cerca il valore del parametro che *massimizza* la verosimiglianza. Si cerca cioè

$$\arg\max_\theta L(\theta, x_1, ..., x_n).$$

$$\arg\max_\theta \log L(\theta, x_1, ..., x_n).$$

Nell'esempio dell'esponenziale,

$$L(\lambda, x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda e^{-\lambda x_i}\right) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\log L(\lambda, x_1, ..., x_n) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Cerchiamo il massimo nella variabile $\lambda$. Imponamo la cosiddetta "equazione di massima verosimiglianza"

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L(\lambda, x_1, ..., x_n) = 0.$$

La sua soluzione sarà lo stimatore cercato.

$$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\widehat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{X}}.$$

In generale non coincidono gli stimatori trovati coi due metodi, e sono migliori gli stimatori di massima verosimiglianza.

Ad esempio, esercizio 2.3 dell'11 gennaio 2017.

# 3 Chi quadro

**Definizione**. Date $Z_1, ..., Z_n$ gaussiane standard indipendenti, la v.a.

$$X = Z_1^2 + ... + Z_n^2$$

è una *chi-quadro a $n$ gradi di libertà*.

**Nota**: in un esercizio, abbiamo trovato la densità di $Z^2$, con $Z \sim N(0, 1)$. Con un po' più di fatica, si può trovare la forma esplicita della densità di una chi-quadro a $n$ gradi di libertà.

**Teorema**.

$$(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2}$$

è una chi-quadro a $n-1$ gradi di libertà.

Indichiamo con $\chi^2_{n,0.1}$ il quantile chi-quadro a $n$ gradi di libertà corrispondente ad area 0.9 (e così via per le altre aree).

**Corollario**.

$$P\left(\chi^2_{n-1,0.95} \leq (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,0.05}\right) = 0.9$$

(e così via). Oppure:

$$P\left((n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,0.1}\right) = 0.9$$

$$P\left(\chi^2_{n-1,0.9} \leq (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}\right) = 0.9$$

Nell'ottica degli intervalli di confidenza,

$$\chi^2_{n-1,0.95} \leq (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,0.05} \text{ a livello di confidenza } 0.9$$

$$\begin{aligned} \chi^2_{n-1,0.95} &\leq (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \\ \sigma^2 &\leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,0.95}} \end{aligned}$$

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,0.05}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,0.95}}\right] \text{ a livello di confidenza } 0.9.$$

Esempio: es. 1.3 del 11/1/2017.

Nell'ottica dei test statistici,

$$\chi^2_{n-1,0.95} \leq (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,0.05} \text{ con probabilità } 0.9$$

$$\begin{aligned} \chi^2_{n-1,0.95} &\leq (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \\ S^2 &\geq \frac{\sigma^2\chi^2_{n-1,0.95}}{n-1} \end{aligned}$$

$$S^2 \in \left[\frac{\sigma^2\chi^2_{n-1,0.95}}{n-1}, \frac{\sigma^2\chi^2_{n-1,0.05}}{n-1}\right] \text{ con probabilità } 0.9.$$

Sulla base di questa affermazione, se scopro che $S^2$ non cade in questo intervallo, rifiuto l'ipotesi nulla

$$\mathcal{H}_0) \text{ varianza} = \sigma^2 \text{ (la vecchia varianza)}$$

# 4 Esempio di prova orale

I dati relativi al seguente esercizio ed il suo svolgimento si trovano in rete.

**Esercizio 1**. Esaminare la gaussianità dei dati forniti. Eventualmente, esaminare la somiglianza con altre distribuzioni. Trovare il valore massimo a meno del 10%, nei vari modi che si ritiene utile.

**Esercizio 2**. La correlazione tra due stringhe di lunghezza 50 è venuta pari a 0.5. Ritenete che siano correlate oppure potrebbero anche essere indipendenti?