Formulario MMMPG 2009/10

Generalità

T v.a. esponenziale di parametro λ: $E[T] = 1/\lambda$.

N v.a. di Poisson di parametro λ:

$$P(N = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad E[N] = \lambda.$$

Il numero di arrivi N_t, entro un tempo t, se i tempi di interarrivo sono esponenziali di parametro λ indipendenti, è una v.a. di Poisson di parametro λt. In particolare, $E(N_t) = \lambda t$.

T_1, T_2 v.a. esponenziale di parametri λ_1, λ_2, indipendenti: $T = \min(T_1, T_2)$ è esponenziale di parametro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

$N_t^{(1)}$, $N_t^{(2)}$, processi di Poisson di parametri λ_1, λ_2, indipendenti: $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ è un processo di Poisson di parametro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k = \frac{1}{1-\rho}, \qquad \sum_{k=0 \text{ oppure } k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}, \quad \text{per } 0 < \rho < 1$$

$$\sum_{k=0}^{N}\rho^k = \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\rho^k/k! = e^{\rho}.$$

Markov

$P(T_{AB} < T_{AC}) = \frac{\lambda_{AB}}{\lambda_{AB}+\lambda_{AC}}$ e generalizzazione a più transizioni.

Catene di nascita e morte, formule generali all'equilibrio (N_{sist} indica il numero di utenti nel sistema, N_{att} in attesa, T_{perm} il tempo di permanenza nel sistema):

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}, \quad a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \pi_n = \frac{a_n}{a},$$

$$E[N_{sist}] = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k, \quad E[T_{perm}] = \sum_k E[T_{perm}|N_{sist} = k]\, P(N_{sist} = k)$$

non esplosione (regime di equilibrio) se $a < \infty$; se c'è un solo servente:

$$E[N_{att}] = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\pi_k = E[N_{sist}] - 1 + \pi_0.$$

Un servente (M/M/1): $\rho = \lambda/\mu$, non esplosione per $\rho < 1$, $a_n = \rho^n$, $a = 1/(1-\rho)$,

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n, \quad E[N_{sist}] = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad E[T_{perm}] = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1-\rho}.$$

Infiniti serventi (M/M/∞): $\rho = \lambda/\mu$, non esplode mai,

$$\pi_n = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}, \quad E\left[N_{sist}\right] = \rho.$$

Coda a c serventi (M/M/c): $\rho = \lambda/c\mu$, non esplosione per $\rho < 1$,

$$\pi_n = \frac{1}{a}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} \quad \text{per } n \leq c-1$$

$$\pi_n = \pi_{c+k} = \frac{1}{a}\frac{\lambda^c}{c!\mu^c}\rho^k \quad \text{per } n \geq c \text{ ovvero } k \geq 0$$

dove

$$a = \sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{\lambda^c}{c!\mu^c}\frac{1}{1-\rho}.$$

Coda a un servente ma numero finito N di stati: $\rho = \lambda/\mu$, non può esserci esplosione,

$$\pi_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^n.$$

Comandi R

plot(X), plot(X,Y), plot(X,Y, type="..."), ts.plot(X), biplot(X), lines(X,Y), hist(X,k), hist(X,k, freq=FALSE), summary(X), mean(X), sd(X), var(X), cov(X,Y), cor(X,Y), lm(Y~X+...), lm(Y~X)$coefficients, pnorm(x,m,s), dnorm(x,m,s), qnorm(x,m,s), rnorm(x,m,s), *weibull(x,a,s), *beta(x,a,b), *gamma(x,a,s), for (k in n:m) {...}, min(X), max(X), sign(X), sum(X), cumsum(X), c(.,....,.), abs(X), which.min(X), princomp(X), princomp(X)$loadings, acf(X,k), read.table(file="...", header=TRUE), matrix(nrow=n, ncol=k), X[], X[,].