Correzioni alle versioni preliminari delle note in rete

December 12, 2012

Questo documento contiene la segalazione delle imprecisioni o errori rintracciati nelle prime versioni messe in rete delle note del corso, corretti nella versione finale. Lo scopo è evitare che lo studente debba ristampare tutto.

1 Correzioni al Capitolo 1.1.2 (Legge di un processo)

In sintesi, tutti gli errori sono dovuti al fatto che le note erano state scritte inizialmente per $T = [0, \infty)$ ed $E = \mathbb{R}$, poi sono state generalizzate in vario modo commettendo qua e là alcuni errori. Questa precisazione può aiutare a capire ulteriori errori che non siano stati per ora rintracciati.

L'insieme dei parametri T è qualsiasi, in questa sezione. Pertanto, la condizione $t_1 < ... < t_n$ che era stata imposta agli elementi dell'insieme $\mathcal{S}$ (prima versione in rete) va modificata. Ora la condizione è $t_i \neq t_j$ per ogni $i \neq j$, $i, j = 1, ..., n$.

Per evitare ambiguità, però, è conveniente ordinare le n-ple τ (prima l'ordinamento era insito nella condizione $t_1 < ... < t_n$). Pertanto, ovunque fosse precedentemente scritto $\{t_1, ..., t_n\}$, va sostituito $(t_1, ..., t_n)$ (n-pla ordinata). Purtroppo questa modifica di notazione va applicata un ventina di volte!

Questa modifica si porterà dietro una modifica nella sezione sul teorema di Kolmogorov.

Nella verifica che $\mathcal{A}$ è un'algebra, invece di scrivere "con $t_1 < t_2$" bisogna scrivere "con $\tau = (t_1, t_2)$".

Poi è stato aggiunto quanto segue (questo non c'entra con la generalizzazioe suddetta). <<Rammentiamo che per verificare la misurabilità di un'applicazione basta farlo su una famiglia generante la σ-algebra in arrivo (in simboli generali, se $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ soddisfa $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ per ogni $B \in \mathcal{G}$, dove $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ ed $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{G})$, allora X è misurabile; infatti, si prenda la famiglia $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(E)$ degli insiemi $B \subset E$ tali che $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$; si verifica che $\mathcal{H}$ è una σ-algebra e contiene $\mathcal{G}$, quindi contiene $\sigma(\mathcal{G})$).>>

Infine, nella parte finale del paragrafo dove si esamina il caso di un processo continuo, si prendano T ed E spazi metrici, T unione numerabile di compatti. Inoltre, nella dimostrazione della Proposizione, si sostituisca il simbolo $|. - .|$ (chiaramente legato al caso particolare $E = \mathbb{R}$) con $d_E(., .)$.

2 Correzioni al Capitolo 1.2 (Teorema di estensione di Kolmogorov)

In breve, qui l'errore è legato alla definizione di $\mathcal{S}$ discussa sopra. Se T è ordinato e imponiamo $t_1 < ... < t_n$, erano corrette le prime note in rete. Nel caso generale, da un lato bisogna richiedere che le leggi μ_τ siano opportunamente invarianti per permutazioni della n-pla τ, altrimenti la definizione di μ sui cilindri non è univoca (un cilindro si può essere scritto in modi diversi a seconda della permutazione di τ). Dall'altro, avendo già imposto questa invarianza sotto permutazioni, si può semplificare un po' notazionalmente la seconda condizione di consistenza, quella legata all'eliminazione di una coordinata t_i: è sufficiente eliminare l'ultima, t_n. Le modifiche da fare al file sono ora ovvie ma troppe per riportarle qui senza creare confusione.

3 Altre modifiche al paragrafo sul teorema di Kolmogorov

Dopo la lezione del 1/10/12, sono state fatte due aggiunte. Prima della definizione di famiglia di distribuzioni consistente, è stata aggiunta l'osservazione:

Si può verificare facilmente che è equivalente richiedere queste condizioni per insiemi B di tipo rettangolare, rispetto a cui esse si scrivono più agevolmente. Possiamo richiedere che

$$\mu_{(t_1,...,t_n)}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mu_{\left(t_{i_1},...,t_{i_n}\right)}(B_{i_1} \times \cdots \times B_{i_n})$$

$$\mu_{(t_1,...,t_n)}(B_1 \times \cdots \times E) = \mu_{(t_1,...,t_{n-1})}(B_1 \times \cdots \times B_{n-1})$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{S}$, $B_1, ..., B_n \in \mathcal{E}$.

Poi, in fondo al paragrafo, è stato aggiunto un esercizio con relativa osservazione.

Exercise 1 *Data una misura di probabilità λ sui boreliani di uno spazio metrico (X, d), diciamo che essa è tight se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto K_ε tale che $\lambda(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Mostrare che il teorema di costruzione dei processi di Kolmogorov continua a valere se, invece di supporre che lo spazio metrico E sia σ-compatto, si suppone che sia metrico e che ogni distribuzione di dimensione finita μ_τ, $\tau \in \mathcal{S}$, sia tight. [Presa $\tau \in \mathcal{S}$ e la corrispondente misura μ_τ su $\mathcal{E}^n$, esiste un boreliano $X_n \subset E^n$ che è uno spazio metrico σ-compatto e μ_τ può essere ristretta ad una misura di probabilità su X_n. Il resto della dimostrazione del teorema di Kolmogorov è inalterata.]*

Remark 2 *Ogni misura di probabilità λ sui boreliani uno spazio metrico completo e separabile (polacco) è tight. La proprietà di essere polacco passa al prodotto cartesiano finito. Allora il teorema di Kolmogorov vale se, invece di supporre che lo spazio metrico E sia σ-compatto, si suppone che sia polacco.*

4 Sui processi gaussiani

Nel teorema di esistenza, bisogna assumere che $C(s,t)$ sia simmetrica. E' stato aggiunto.

L'esercizio finale è difficile. Fare esempi triviali è facile ($m = 0$, $C = 0$). Ma trovare una C che soddisfi $C(0,0) = C(1,1) = 0$ e $C(s,t) > 0$ altrimenti (o per un'ampia gamma di s,t) può essere molto difficile. In aggiunta, c'è il problema che vorremmo traiettorie continue. Questo è garantito dal teorema di regolarità di Kolmogorov (che verrà ricordato del Cap. 2), quando $C(s,t)$ ha opportune proprietà di regolarità; quindi vorremmo anche tali proprietà, cosa che rende l'esercizo ancor più impegnativo.

5 Filtrazioni

E' stato aggiunto, in positivo, il seguente:

Remark 3 *Se* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *è completa,* X *è adattato ed* Y *è una modificazione di* X*, allora* Y *è adattato.*

6 Correzioni apportate il 21/10

1. Sono state fatte delle precisazioni nella dimostrazione della proposizione che afferma:

Proposition 4 *Un moto browniano grossolano esiste.*

2. E' stata completata la dimostrazione dell'equivalenza tra le due definizioni di moto browniano. Infatti la dimostrazione data in precedenza era incompleta, in quanto veniva verificata l'indipendenza con un insieme che non era una base, ma solo un sistema di generatori.

3. E' stato scritto più esplicitamente l'enunciato della:

Proposition 5 *Esiste un moto browniano continuo e le sue traiettorie sono* α*-hölderiane, per ogni* $\alpha \in (0, 1/2)$.

4. Sono state fatte delle precisazioni nella dimostrazione del teorema sulla variazione quadratica del MB.

5. E' stata scritta un po' meglio la dimostrazione del teorema di non derivabilità in alcun punto, del MB.

6. Nel Capitolo 1, è stato riorganizzato in una piccola sottosezione, un po' più elementare diprima, il materiale relativo alla legge sullo spazio delle funzioni continue.

7 Correzioni apportate il 31/10

1. Inserite le seguenti osservazioni, dopo i teoremi di arresto nel caso discreto.

Remark 6 *I due risultati precedenti sono equivalenti. Abbiamo dimostrato il corollario a partire dal teorema. Se invece avessimo dimostrato prima il corollario, basterebbe prendere la speranza di ambo i membri delle sue formule per ottenere quelle del teorema.*

Remark 7 *Vedremo più avanti che si può rimuovere l'ipotesi $\tau_2 = N$, nel corollario.*

2. Teorema sulla disuguaglianza massimale, tempo discreto: è stata precisata l'ipotesi su M: martingala oppure una submartingala positiva. Nella dmostrazione è stata aggiunta la seguente precisazione: <<ed il processo $|M_n|$ è una submartingala (se M_n è una martingala, allora $|M_n|$ è una submartingala come trasformazione convessa; se M_n è una martingala positiva, allora $|M_n|$ è una submartingala come trasformazione convessa crescente)>>.

3. Teorema sulla disuguaglianza di Doob, tempo discreto: come sopra, è stata precisata l'ipotesi su M: martingala oppure una submartingala positiva. E' stato anche sottolineato che: <<se $E[|M_N|^p] < \infty$ allora anche $\max_{n=1,\dots,N} |M_n|^p$ è integrabile e vale la disuguaglianza.>>

4. Teorema sulla disuguaglianza massimale, tempo continuo: come sopra, martingala oppure una submartingala positiva.

5. Teorema sulla disuguaglianza di Doob, tempo continuo: come sopra, martingala oppure una submartingala positiva.

6. Teorema sulla disuguaglianza massimale, tempo continuo: nella dimostrazione c'era un segno sbagliato per ε, precisamente era sbagliata

$$\left\{ \sup_{t\in[0,T]} |M_t| \geq \lambda - \varepsilon \right\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Un gruppo di frasi può essere sostituito dalle seguenti.

Preso $\varepsilon > 0$, grazie all'ipotesi (**??**), se $\sup_{t\in[0,T]} |M_t| = \eta$ (o ancor meglio se $\sup_{t\in[0,T]} |M_t| \geq \eta$) allora esiste n tale che $\max_{k=1,\dots,2^n} \left| M_k^{(n,T)} \right| > \eta - \varepsilon$. Preso $\eta = \lambda + \varepsilon$, questo dice che

$$\left\{ \sup_{t\in[0,T]} |M_t| \geq \lambda + \varepsilon \right\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

quindi

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} |M_t| \geq \lambda + \varepsilon \right) \leq \lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq \frac{1}{\lambda} E[|M_T|].$$

I numeri $\lambda, \varepsilon > 0$ sono arbitrari, quindi abbiamo anche dimostrato che, per $\varepsilon < \lambda$,

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} |M_t| \geq \lambda \right) \leq \frac{1}{\lambda - \varepsilon} E[|M_T|].$$

Pendendo il limite per $\varepsilon \to 0$ si ottiene la tesi.

8 Correzioni apportate il giorno 8/11

1. Nel corollario del teorema d'arresto che afferma

$$E\left[M_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}\right] = M_{\tau_1}$$

c'era scritto: (risp. $E\left[M_{\tau_1}1_A + M_N 1_{A^c}\right] \leq E\left[M_N\right]$ da cui $E\left[M_{\tau_1}1_A\right] = E\left[M_N 1_A\right]$ nel caso della submartingala), mentre la versione corretta è: (risp. $E\left[M_{\tau_1}1_A + M_N 1_{A^c}\right] \leq E\left[M_N\right]$ da cui $E\left[M_{\tau_1}1_A\right] \leq E\left[M_N 1_A\right]$ nel caso della submartingala).

2. Dopo il teorema di convergenza per martingale discrete sono stati aggiunti due corollari ed un teorema sulle martingale chiuse, con dimostrazione (parziale).

9 Correzioni apportate il giorno 10/12

1. L'enunciato del Teorema 31 è stato ripulito di un errore di stampa circa B^1, B^2 invece che $B = \left(B^1, ..., B^d\right)$.

2. La dimostrazione del Teorema 32 del Capitolo 5 è stata un po' migliorata, ed aggiunta un'osservazione dopo il teorema.

3. Nella dimstrazione del Lemma 15, Capitolo 6, è stata eliminata una verifica iniziale di integrabilità che era superflua ed è stata precisata la verifica di integrabilità finale.

10 Correzioni apportate il giorno 12/12

1. Teorema 27: aggiunta una precisazione sul significato di $M_{t\wedge\tau_n}$.

2. Paragrafo sulle SDE generali: aggiunte in modo esplicito le definizioni, un'osservazione subito seguente, precisato l'enunciato del teorema (ruolo della condizione $E\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2\right] < \infty$), precisati alcuni passaggi del passo 1 (in particolare la verifica che $s \mapsto \sigma\left(s, X_s^i\right)$, $i = 1, 2$, è un processo di classe M^2).